



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

경영학박사 학위논문

이자율 기간구조모형에 관한 연구

- MCMC를 이용한 베이지언 접근법 -

Studies on the Dynamic
Term Structure Models of Interest Rates

2012 년 08 월

서울대학교 대학원

경영학과 재무금융 전공

박 정 민

초 록

이자율기간구조(term structure of interest rates)는 재무·금융 분야에서 대단히 중요한 위치를 차지하는 주제로서 채권 및 이자율 파생상품의 가격결정, 채권투자전략 및 통화정책의 수립 등에서 다양하게 이용된다. 이러한 중요성으로 인해 많은 학자들과 투자자들이 이자율 기간구조모형을 개발하고 검증하는데 많은 노력을 기울여 왔다. 무이표채(zero-coupon bonds)의 만기수익률에 대한 횡단면적 특성과 동태적인 특성을 나타내는 이자율 기간구조모형은 그 활용의 중요성으로 인해 Vasicek(1977), Cox, Ingersoll and Ross(1998, 1985, CIR) 이후 이에 대한 연구가 활발하게 진행되어 왔다. 본 논문에서는 현재까지 제시된 기존 이자율 기간구조모형에 관한 연구를 연속시간모형과 이산시간모형으로 구분하여 정리하고 이를 실증분석 측면에서 살펴본다. 그리고 미관측상태변수를 가지는 상태공간모형으로 표현되는 이자율 기간구조모형을 추정하는 여러 가지 방법론에 대해 자세히 소개하고 새로운 MCMC 베이지언추론 알고리즘을 사용한 실증분석을 통해 이자율 기간구조모형을 평가한다. 본 논문은 크게 두 부분으로 구성된다. I 부는 이자율 기간구조모형의 유효성 분석과 II 부는 이산시간 이자율 기간구조모형에 관한 연구이다.

대부분의 이자율기간구조 이론에서는 확률변동성(stochastic volatility)이나 평균회귀성향과 같은 채권수익률의 전형적인 특성을 설명할 수 있도록 모형이 설정된다. 그러나 많은 경우 확률변동성이 미관측상태변수의 함수이므로 이자율의 조건부이자적률의 특성 중 하나인 수준효과(level effect)가 명시적이기 보다는 암묵적으로 특정한 값으로 고정된다. 이자율 기간구조모형 유효성 분석에서는 연속시간 균형 이자율 기간구조모형을 소개하고 모형별 수준효과 설정을 중심으로 확률변동성 특성의 차이점을 살펴본다. 그리고 대표적인 기존의 이자율 기간구조모형이 수준효과를 포함하는 조건부이자적률을 충분히 설명할 수 있는가를 평가한다. 이를 위하여 수준효과 크기를 파라미터로 포함하는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 설정하고 이를 추정하기 위한 새로운 MCMC(Markov

Chain Monte Carlo) 베이지언추론 알고리즘을 제시한다. 실증분석에 앞서 이자율 기간구조모형을 추정하는 다양한 추정방법에 대해서도 살펴본다. 3개월만기 미재무부채권수익률, 1개월만기 및 3개월만기 유로달러이자율 그리고 3개월만기 한국국채수익의 주간 및 일간자료를 이용하여 분석한 결과, 자료별로 매우 상이한 확률변동성의 수준효과가 나타났다. 주간자료 추정에서 미재무부채권수익률, 1개월만기 유로달러이자율, 한국국채수익률의 사후표본평균이 각각 ATSM, ISRM, 그리고 QTSM에서 설정된 수준효과 크기에 가까운 것으로 나타났다. 이러한 결과는 기존 이자율 기간구조모형을 분석하고 활용함에 있어 각 모형의 2차적률 적합성 한계를 명확히 인식해야함은 물론, 2차이상의 조건부적률의 특성을 충분히 반영할 수 있는 새로운 이자율 기간구조모형에 대한 연구가 필요함을 시사한다.

이자율 기간구조모형은 상태변수가 따르는 확률과정의 시간분할에 따라 연속시간모형과 이산시간모형으로 구분될 수 있다. 이자율 기간구조모형에 관한 많은 연구에서 연속시간모형을 제시하고 있지만, 현실에서 관측되는 이자율 자료가 이산시간 단위이므로 이를 반영할 수 있는 다양한 이산시간모형에 대한 관심 또한 적지 않다. 이자율 기간구조모형을 연속시간 하에서 다루는 것이 채권가격의 해석해를 구하기는 쉽다. 그러나 추정을 위해 연속시간 확률과정을 이산화하는 과정을 거쳐야하고 미관측상태변수의 해석적인 전이확률밀도함수(analytical transition probability density)를 얻는 것이 쉽지 않으므로 연속시간모형은 실증분석에는 적절하지 않은 모형이라 할 수 있다. 반면에 이산시간모형은 이산시간 단위로 이루어지는 투자자 또는 정책당국의 의사결정을 반영 할 수 있고, 해석적인 전이확률밀도함수를 얻을 수 있는 이점 등으로 실증분석에 유용할 수 있다. 이산시간 이자율 기간구조모형에 관한 연구에서는 이산시간모형을 크게 연속시간모형을 단순히 이산화한 ‘연속시간 상사 이산시간모형(continuous time model analog)’과 이산시간 지수선형과정인 Car 과정(compound autoregressive process)에 바탕을 둔 ‘정확한 이산시간모형(exact discrete time model)’으로 구분한다. 이산화모형은 Feller조건과 같은 연

속시간모형이 가지는 특성을 일반적으로 유지하지 못할 뿐 아니라 상태 변수의 해석적인 전이확률밀도함수를 얻는 것이 쉽지 않다. 그러나 정확한 이산시간모형은 연속시간모형이 가지는 특성을 모두 충족시키면서 해석적인 전이확률밀도함수를 얻을 수 있어 최우추정이 가능하며 일반균형 접근법을 따르는 거시금융모형과 부합하는 이자율기간구조를 도출할 수 있다. 본 논문에서는 연속시간모형과의 비교를 통해 실증분석 측면에서 이산시간모형의 특성과 한계를 이해한다. 이를 위해 이자율기간구조와 관련된 기초개념을 이해하고 연속시간 상사모형을 살펴 본 후 이산화모형이 가지는 문제를 극복하는 정확한 이산시간모형과 관련된 개념을 정리하고 최근의 연구를 분석한다.

주요어 : 연속시간 이자율 기간구조모형, 수준효과, 확률변동성,
MCMC 베이지언추론, 정확한 이산시간 이자율 기간구조모형,
Feller 조건, Car 과정

학 번 : 2007-30791

목 차

I 이자율 기간구조모형 유효성 분석

제 1 장 서론	1
제 2 장 연속시간 균형 이자율 기간구조모형	4
제 1 절 채권가격결정을 위한 기본방정식의 유도	6
1. 확률할인요인을 이용한 유도	6
2. 블랙-숄즈 유형의 무차익 채권포트폴리오를 이용한 유도	8
3. 위험중립측도 하의 채권가격과 측도변환	11
제 2 절 명시적 상태변수 이자율 기간구조모형	14
1. 단일요인 이자율 기간구조모형	14
2. 다요인 이자율 기간구조모형	20
제 3 절 일반적인 이자율 기간구조모형	27
1. 지수선형모형	28
2. 지수이차모형	38
3. 비선형확률변동성모형	42
제 4 절 모형별 확률변동성의 특성	43
제 3 장 이자율 기간구조모형 추정방법	47
제 1 절 일반화된 적률법	54
제 2 절 QML추정법	58
1. 역변환을 이용한 QML추정법	58
2. 칼만필터를 이용한 QML추정법	66

제 3 절 SML추정법	70
제 4 절 간접추론추정법, MSM, EMM	76
제 5 절 MCMC를 이용한 베이지언 추론	85
 제 4 장 확률변동성 이자율모형 설정과 베이지언 추론	 91
제 1 절 단기이자율 확률변동성모형	91
제 2 절 수준효과를 포함하는 일반적인모형	96
제 3 절 사전확률밀도함수	98
제 4 절 조건부 사후확률밀도함수	100
 제 5 장 실증분석	 109
제 1 절 분석자료	110
제 2 절 사전확률분포함수의 파라미터 설정	113
제 3 절 분석결과	114
 제 6 장 결론	 133
 참고문헌	 135

Ⅱ 이산시간 이자율 기간구조모형

제 1 장 서론	152
제 2 장 이자율 기간구조와 관련된 기본 개념	159
제 1 절 채권가격과 수익률	159
제 2 절 확률할인요인	161
제 3 장 연속시간 상사 이자율 기간구조모형	166
제 1 절 단일요인 이산시간모형	166
1. 단일요인 Vasicek모형	166
2. 단일요인 CIR모형	169
제 2 절 다요인 이산시간모형	178
1. 다요인 Vasicek모형	173
2. 다요인 CIR모형	173
제 3 절 일반적인 이산시간 지수선형모형	179
1. BFT의 이산시간 지수선형모형	181
2. AP의 이산시간 지수선형모형	189
제 4 절 이산시간 지수이차 가우시언모형	193
제 4 장 정확한 이산시간 이자율 기간구조모형	198
제 1 절 이산시간 지수선형과정의 주요 개념	199
1. 라플라스변환	199
2. 지수선형 확률할인요인함수	200
3. 이산시간 지수선형과정의 측도변환	204
4. Compound Autoregressive(Car) 과정	206

5. Car 과정의 확장	214
제 2 절 LSD의 이산시간 지수선형모형	215
제 3 절 이산시간 위샷트 이자율 기간구조모형	223
제 4 절 이산시간 국면전환 이자율 기간구조모형	225
제 5 절 효율적인 이자율 기간구조모형 설정	232
1. 단기이자율	233
2. Direct Modeling	233
3. RN Constrained Direct Modeling	235
4. Back Modeling	236
5. RN Constrained Direct Modeling 적용 예	237
 제 5 장 요약 및 결론	 242
 참고문헌	 244
 Abstract	 253

표목차

[표 4-1] 단기이자율 확률과정	93
[표 4-2] 표본추출블록	101
[표 5-1] 단기이자율에 대한 요약통계량(주간)	111
[표 5-2] 단기이자율모형 추정결과 비교 TB3M: (1954/01/06~1995/04/19)	118
[표 5-3] 이산시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(주간)	126
[표 5-4] 이산시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(일간)	127
[표 5-5] 연속시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(주간)	128
[표 5-6] 연속시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(일간)	129
[표-1] 이산시간 이자율 기간구조모형의 구분	157

그림목차

[그림 5-1] 단기이자율 추이(주간)	112
[그림 5-2] 제약하의 공분산행렬에 포함된 파라미터 $\{\rho, \sigma_{\eta}\}$ 의 사전확률분포	114
[그림 5-3] 파라미터에 대한 베이지언추론 결과 (TB3M(W): 1954/01/06~1995/04/19)	119
[그림 5-4] 확률변동성 베이지언추론 결과 (TB3M(W): 1954/01/06~1995/04/19)	120
[그림 5-5] 파라미터에 대한 베이지언추론 결과 (TB3M(W): 1954/01/08~2010/06/25)	130
[그림 5-6] 확률변동성 베이지언추론 결과 (TB3M(W): 1954/01/08~2010/06/25)	122
[그림 5-7] 파라미터에 대한 베이지언추론 결과 (KRTB3M(W): 1998/06/05~2010/06/25)	131
[그림 5-8] 수준효과 파라미터 γ 의 조건부 사후확률분포 비교	132

I 이자율 기간구조모형 유효성 분석

제 1 장 서론

이자율 기간구조모형은 이론적으로 무차익조건을 충족할 뿐만 아니라 현실에서 관측되는 이자율기간구조의 전형적인 특성들을 설명할 수 있어야 한다. 즉, 만기가 다른 채권수익률들이 평균으로 회귀하는 현상을 보이고 횡단면적으로 높은 상관관계와 시계열적으로 지속성(persistency)을 가진다는 점, 그리고 조건부변동성(time-varying conditional volatility)이 지속적이고 (단기)이자율에 의존한다는 점 등을 설명할 수 있어야 한다. 이자율 기간구조모형은 지속성과 시변변동성을 가지는 소수의 미관측상태변수에 의존하도록 설정되어 이러한 특성을 반영하고 있다. 일반적으로 채권수익률의 시변조건부변동성이 단기이자율 수준에 의존하는 정도를 수준효과(level effect)라고 하는데 모형이 미관측상태변수들로만 구성되는 경우 수준효과는 명시적으로 나타나지 않고, 상태변수를 통하여 간접적으로만 설명된다. 이자율기간구조의 특성을 반영하는 대표적인 모형으로는 Duffie and Kan(1996)과 Dai and Singleton(2000)의 ATSM(affine term structure model), Ahn et al.(2002) 및 Leippold and Wu(2002)의 QTSM(quadratic gaussian term structure model), Ahn and Gao(1999)의 ISRM(inverted square root model) 등이 있다. 이들 모형은 채권가격과 파생상품가격의 해석해(analytical solution)를 제시할 뿐 아니라 다루기가 용이하기 때문에 자주 사용된다. 이 중에서도 ATSM은 추정이 상대적으로 용이하여 실증분석에서 많이 이용되고 있다. ATSM을 이용한 대부분의 실증분석에서 이자율 기간구조모형의 적합성(adequacy)에 대한 평가는 기대가설(expectation hypothesis)을 중심으로 이루어져 왔는데 이러한 평가는 이자율기간구조의 1차적률에 초점을 둔 것이다. 그러나 헤지를 포함한 리스크관리 등의 목적으로 모형을 활용하고자 하는 경우에는

1차적률에 대한 적합성만으로 충분하지 않고 2차이상의 조건부적률에 대한 적합성도 함께 요구된다.

지금까지 시변조건부변동성의 지속성 및 수준효과 등 이자율기간구조의 2차적률 특성에 대한 적합성 평가는 상대적으로 충분히 이루어지지 못한 측면이 있다. 특히, 조건부변동성의 수준효과는 ATSM, QTSM, ISRM 뿐만 아니라 대부분의 모형에서 사전적으로 그 크기가 고정되어 있다. 이들 모형에서는 관측된 자료로부터 수준효과의 크기가 측정되도록 그 값이 파라미터로 설정되어 있지 않으므로 2차이상 적률의 동태적인 특성을 설명하는데 사전적으로 제약이 부과된 것으로 볼 수 있다. 따라서 기존의 모형이 현실에서 관측되는 조건부변동성의 수준효과를 충분히 설명할 수 있는지에 대한 평가가 필요하다. 조건부이차적률에 대한 이자율 기간구조모형의 적합성에 관한 체계적인 연구로는 Ahn et al.(2003)의 연구가 있다. 그러나 이들의 연구는 기존 ATSM, QTSM, ISRM 등을 조합하여 얻어지는 합성모형(hybrid model) 가운데 어떤 모형이 확률변동성을 더 잘 설명하는지에 대한 상대평가를 다루고 있지 개별적으로 모형의 2차적률 적합성을 절대적으로 평가하고 있지는 않다. 또한 ATSM을 이용한 대부분의 연구에서도 GARCH모형을 이용하여 얻은 조건부변동성과 ATSM모형에서 얻어지는 조건부변동성을 시각적으로 비교하는 한정된 결과를 제시하고 있다.

ATSM, QTSM 등은 확률변동성이 미관측상태변수를 통해 결정되므로 실질적으로 수준효과의 크기가 고정되는 특성이 있다. 그러나 수준효과의 크기가 고정되는 것으로 인해 이들 모형이 시변조건부변동성과 같은 2차이상의 조건부적률에 대해 충분한 설명력을 가지고 있는지를 평가하는 것은 상대적으로 쉽지 않다. 본 연구에서는 기존의 모형이 이자율기간구조의 조건부이차적률을 충분히 설명할 수 있는지를 실증분석을 통해 살펴보고자 한다. 이를 위해 수준효과를 사전적으로 고정하지 않는 단기이자율 확률변동성모형을 이용하였다. 이러한 모형을 분석에 사용하는 것은 ATSM, QTSM 등을 확률변동성을 포착할 수 있는 요인확률변

동성모형(factor stochastic volatility model)으로 볼 수 있기 때문이다. 다만 일반적인 확률변동성모형과는 달리 확률변동성이 특정 미관측상태변수로 제시되지 않는다는 점에서 차이가 있다. 추정방법으로 MCMC(Markov chain Monte Carlo) 베이지언추론 알고리즘을 새롭게 제시하고 분석에 사용한다. 이는 단기이자율이 큰 지속성을 보이고 있으므로 관측된 시계열자료가 동일한 수의 독립적인 자료에 비해 상대적으로 정보량이 적고 확률변동성모형이 미관측상태변수를 포함하는 모형이라는 특징을 고려한 것이다.

확률변동성의 수준효과에 대한 분석결과는 다음과 같다. 3개월만기 미국재무부채권수익률에서 추정된 수준효과의 크기는 ATSM에서 설정된 크기에 가까운 것으로 나타났으며, 1개월만기 유로달러이자율 주간자료에 대한 분석에서는 ISRM에 가까운 것으로 나타났다. 그리고 3개월만기 유로달러이자율 주간 및 일간자료와 1개월만기 유로달러이자율 일간자료에 대한 분석에서는 ISRM보다 더 큰 수준효과가 존재하는 것으로 나타났다. 잔존만기 3개월 한국의 국채수익률 주간자료에 대한 분석에서는 수준효과의 크기가 QTSM에 가깝지만, 일간자료로부터 추정된 수준효과는 ISRM에 가까운 것으로 나타났다. 이러한 결과는 한국 국채에 대한 이자율기간구조 분석을 할 경우 ATSM은 조건부이차적률의 동태적인 특성을 설명하기에 충분하지 않을 수 있다는 것을 의미한다. 그러므로 기존 모형에 대한 분석과 활용에 있어 모형이 가지는 한계에 유의할 필요가 있음을 시사한다.

본 연구는 다음과 같이 구성된다. 먼저 제 2장에서는 연속시간 균형이자율 기간구조모형을 살펴본다. 여기서 기본적인 채권가격 결정원리, 기초가격 결정방정식의 유도과정 그리고 ATSM, QTSM, ISRM 등의 일반적인 이자율 기간구조모형의 특징을 이해한다. 제 3장에서는 이자율 기간구조모형에 대한 기존의 연구에서 제시된 다양한 추정방법에 대해 살펴본다. 미관측상태변수를 포함하는 상태공간모형에 대한 기본적인 필터링 방법, 그리고 GMM(generalized method of moments), QML(quasi-

maximum likelihood) 등의 고전적인 추정방법과 함께 SML(simulated maximum likelihood), II(indirect inference), MSM(method of simulated moments), EMM(efficient method of moments) 그리고 MCMC(Markov chain Monte Carlo)를 이용한 베이지언 추론방법 등의 시뮬레이션을 이용하는 추정방법까지 포함한다. 그리고 제 4장에서는 이자율 기간구조모형의 특징 중 조건부이차적률 설정의 유효성(efficacy)을 살펴본다. 이를 위해 수준효과를 포함하는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 설정하고 이에 대한 MCMC 베이지언 추론 알고리즘을 제시한다. 제 5장에서는 제 4장에서 제시된 베이지언 추론 알고리즘을 이용하여 추정한 일반적인 단기이자율 확률변동성모형 실증분석 결과를 보여준다. 마지막으로 제 6장에서는 결론과 시사점을 다룬다.

제 2 장 연속시간 균형 이자율 기간구조모형

동태적 효용극대화의 목적함수로부터 유도되는 균형 이자율 기간구조모형에서는 기본적으로 거래비용 및 조세에 따른 왜곡, 숏세일 제약 등의 마찰적 요인이 존재하지 않는 완전시장이 존재하며, 채권을 포함한 모든 증권은 분할하여 연속적으로 거래될 수 있다는 가정을 전제하고 있다. 이러한 완전시장 가정하에서 연속시간 이자율 기간구조모형은 만기시점이 T ($T > t$)인 무이표채의 t 시점 가격 $P(t, T)$ ¹⁾에 대한 확률과정과 N 차원의 상태변수벡터 X_t 사이의 관계를 설명하고자 한다. 다시 말

1) 무이표채가격 $P(t, T)$ 와 그 만기수익률 $y(T-t)$ 는 다음과 같은 관계를 충족하므로 채권가격을 결정하고 설명한다는 표현은 만기수익률을 결정하고 설명한다는 표현과 동일하다.

$$y(T-t) = -\frac{\log P(t, T)}{T-t}$$

이하의 논의에서는 특별한 언급이 없는 한 동일한 의미로 사용된다.

해 채권가격을 $P(X_t, t, T)$ 와 같이 외생적인 상태변수의 함수로 설정한다²⁾. 채권가격결정을 위한 상태변수벡터 X_t 의 확률과정과 상태변수에 내재되어 있는 위험의 시장가격 λ_t , 그리고 단기이자율(instantaneous interest rate) r_t 에 대한 가정은 다음과 같다³⁾.

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ \lambda_t = \lambda(X_t) \\ r_t = r(X_t) \end{cases} \quad (2-1)$$

여기에서 $\mu(X)$ 는 $(N \times 1)$ 추세함수벡터를, $\sigma(X)$ 는 변동성함수들을 포함하는 $(N \times N)$ 행렬을, W_t 는 $(N \times 1)$ 표준적인 위너과정벡터를 나타낸다. 그리고 위험의 시장가격 λ_t 는 $(N \times 1)$ 벡터이며 단기금리 r_t 는 위와 같이 상태변수벡터 X_t 의 함수로 가정되는데, 이 때 $\lambda(\cdot)$ 과 $r(\cdot)$ 의 함수 형태는 알려진 것으로 가정된다. $\lambda(\cdot)$ 와 $r(\cdot)$ 의 구체적인 함수 형태는 각각의 모형별로 다르게 설정되므로 기본적인 채권가격결정방정식을 유도하는 과정에서는 그 형태를 알 수 있다는 가정만으로 충분하다.

균형 이자율 기간구조모형을 위한 외생적인 상태변수의 확률과정을 식 (2-1)과 같이 설정하면 다변량 Itô-lemma(multivariate Itô-lemma)를 이용하여 다음과 같이 채권가격의 확률과정을 얻을 수 있다.

$$dP(t, T) = \mu_p(t, T)P(t, T)dt + \sum_{i=1}^m \sigma_{P_i} P(t, T) dW_{it} \quad (2-2)$$

-
- 2) 이 후 논의에서는 특별한 언급이 없는 한 채권가격은 무이표채의 가격을 의미한다. 그리고 만기시점이 T 인 채권의 t 시점의 가격이 상태변수에 의존함에도 불구하고 표기의 편의를 위하여 상태변수에 대한 의존관계는 생략하고 간략하게 $P(t, T)$ 로 표기하기로 한다.
- 3) 논의의 편의를 위하여 이하의 논의에서는 특별한 언급이 없는 한 $\sigma(X)$ 는 대각행렬을 나타내며, 위너과정의 증가분 dW_t 는 순간상관관계 $\rho_{ij}dt$ 를 가지는 것으로 가정하기로 한다.

식 (2-2)와 같은 채권가격의 확률과정에서 추세함수와 변동성함수는 각각 다음과 같다.

$$\begin{cases} \mu_p(t, T)P(t, T) = \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial P}{\partial X_i} \mu_i(X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j} \sigma_i(X) \sigma_j(X) \rho_{ij} \\ \sigma_{P_i}(t, T)P(t, T) = \frac{\partial P}{\partial X_i} \sigma_i(X) \end{cases} \quad (2-3)$$

제 1 절 채권가격결정을 위한 기본방정식 유도

균형모형에서 이자율 기간구조모형을 위한 기본적인 채권가격결정방정식은 크게 두 가지 방법으로 유도될 수 있다. 첫 번째 방법은 확률할인요인(stochastic discount factor: SDF 또는 pricing kernel)을 적용한 할인된 채권가격이 마팅게일 과정을 따른다는 것을 이용하는 방법이며, 두 번째는 블랙-숄즈 옵션가격결정에서와 같이 무위험채권 포트폴리오를 이용하는 방법이다. 아래에서 이들 두 가지 방법을 이용한 기본적인 채권가격결정식을 유도하는 과정을 살펴보기로 한다.

1. 확률할인요인을 이용한 유도

균형 이자율 기간구조모형에서는 먼저 SDF M_t 의 확률과정을 설정함으로써 채권가격결정을 위한 기본 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$dM_t = -r_t M_t dt - M_t \lambda(X_t)' dW_t \quad (2-4)$$

여기에서 r_t 는 상태변수 X_t 의 함수인 단기이자율을 나타내며, $\lambda(X_t)$ 는 위험에 대한 시장가격을 나타내는 $(N \times 1)$ 벡터이다. 그리고 W_t 는 상태변수 X_t 의 확률과정에서 위험 또는 불확실성을 유발하는 요인과 동일한 표준적인 $(N \times 1)$ 위너과정벡터를 나타낸다. SDF가 식 (2-4)와 같은 SDE로 설정되면, SDE를 전방으로 풀고 난후 조건부 기대치를 취하여 채권가격 $P(t, T)$ 를 구할 수 있다. 즉, 만기시점 T 에 1을 지급하는 무이표채의 t 시점에서 가격은 다음과 같다.

$$P(t, T) = E_t \left[\frac{M_T}{M_t} \right] \quad (2-5)$$

여기에서 $E_t[\cdot]$ 는 t 시점까지 이용가능한 정보에 대한 실질측도 (physical probability measure, P 측도) 하에서의 조건부 기대치를 나타낸다. 식 (2-5)는 SDF M_t 로 할인된 채권가격이 마팅게일과정을 따른다는 것을 뜻하며 다음과 같은 식이 성립하여야 함을 의미한다.

$$E_t [d\{M_t \cdot P(t, T)\}] = 0 \quad (2-6)$$

식 (2-6)은 M_t 로 할인된 채권가격 $M_t \cdot P(t, T)$ 의 확률과정을 나타내는 SDE의 추세항이 0임을 나타낸다. $M_t \cdot P(t, T)$ 에 대하여 Ito-lemma를 적용하면 다음과 같은 확률과정의 추세항을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & E_t \left[\frac{d(M_t \cdot P(t, T))}{dt} \right] \\ &= E_t [dP(t, T) \cdot M_t] + E_t [P(t, T) \cdot dM_t] + E_t [dP(t, T) \cdot dM_t] \\ &= \mu_P(t, T)P(t, T)M_t - r_t M_t P(t, T) - M_t \lambda(X_t) \sigma_P(t, T) P(t, T) \end{aligned}$$

식 (2-4)와 같은 확률과정을 따르는 SDF M_t 는 항상 양이므로 위의 식

을 M_t 로 나눈 다음 식 (2-2)과 식 (2-3)를 이용하여 정리하면 채권가격 결정에 위한 기초편미분방정식 (fundamental PDE for bond pricing)을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j} \sigma_i(X) \sigma_j(X) \rho_{ij} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial P}{\partial X_i} [\mu_i(X) - \lambda_i(X) \sigma_i(X)] + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0 \quad (2-7)$$

식 (2-7)의 편미분방정식은 $P(T, T) = 1$ 의 경계조건을 충족하여야 한다. Vasicek(1977), Merton(1973), CIR(1985) 등의 단일요인 이자율 기간 구조모형의 경우 식 (2-7)의 PDE에 해석해(analytical solution)를 구할 수 있다. 다요인 기간구조 모형이나 보다 일반적인 모형과 같이 해석해를 얻는 것이 어렵거나 불가능할 경우에는 수치적인 방법으로 해를 구할 수 있다. 그러나 Feynman-Kac 공식을 이용하면 보다 쉽게 식 (2-7)의 해를 얻을 수 있다. 이 내용은 측도변환을 다룰 때 보다 자세히 살펴보기로 한다.

2. 블랙-숄즈 유형의 무차익 채권 포트폴리오를 이용한 유도

앞에서는 SDF로 확인된 채권가격이 마팅게일 성질을 충족한다는 것을 이용하여 균형 이자율 기간구조모형을 위한 기본적인 채권가격결정식 식 (2-7)을 유도하는 방법을 살펴보았다. 식 (2-7)의 PDE는 채권가격 블랙-숄즈 옵션가격결정에서와 같이 무차익 채권 포트폴리오를 구성한 후 서로 다른 만기 T 를 가지는 채권포트폴리오의 추세함수벡터 $\mu(t, T)$ 에 무차익 거래(absence of arbitrage) 제약을 부과함으로써 유도될 수 있다.

이를 위해서 $K = N + 1$ 개의 서로 다른 만기의 채권으로 구성된 포트폴리오를 다음과 같이 구성하자. $\{T_i, i = 1, \dots, K\}$ 의 만기를 가지는 채권의 비중을 $\{w_i, i = 1, \dots, K\}$ 라 하면 채권 포트폴리오의 가치는 다음과 같다.

$$\Pi_t = \sum_{k=1}^K w_k P(t, T_k) \quad (2-8)$$

개별 채권가격의 확률과정이 식 (2-2)과 식 (2-3)에서와 같다는 것을 이용하여 Itô-lemma를 적용하면 서로 다른 만기의 채권들로 구성된 포트폴리오의 확률과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \sum_{k=1}^K w_k \cdot dP(t, T_k) \\ &= \left[\sum_{k=1}^K w_k \mu_P(t, T_k) P(t, T_k) \right] dt + \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^K w_k \sigma_{P_i}(t, T_k) P(t, T_k) \right] dW_{it} \end{aligned} \quad (2-9)$$

여기에서 i 와 k 에 대한 합에 있어 그 순서가 서로 바뀌어 있음에 주의하라. 채권의 수 K 가 위험요인인 dW_t 의 차원 N 보다 크므로 다음의 식을 충족하도록 포트폴리오의 비중을 결정하면 국지적 무위험 포트폴리오를 구성할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^K w_k \sigma_{P_i}(t, T_k) P(t, T_k) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2-10)$$

위와 같은 식을 충족할 수 있도록 포트폴리오의 비중을 연속적으로 변화시킴으로서 포트폴리오의 동태적인 가치변화가 항상 무위험이 되도록 포트폴리오를 구성할 수 있다. 그리고 무차익거래(absence of arbitrage) 제약조건은 포트폴리오의 기대수익률이 무위험 단기이자율 r_t 와 같아야 함을 의미한다.

$$\sum_{k=1}^K w_k P(t, T_k) [\mu_p(t, T_k) - r_t] = 0 \quad (2-11)$$

행렬대수를 이용하면 식 (2-10)의 무위험 포트폴리오 비중조건을 다음과 같이 간략하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{P_1}(t, T_1) & \cdots & \sigma_{P_1}(t, T_K) \\ \sigma_{P_2}(t, T_1) & \cdots & \sigma_{P_2}(t, T_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{P_K}(t, T_1) & \cdots & \sigma_{P_K}(t, T_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t, T_1)w_1 \\ P(t, T_2)w_2 \\ \vdots \\ P(t, T_K)w_K \end{bmatrix} \equiv A_1 z = 0 \quad (2-12)$$

여기에서 $z = [P(t, T_1)w_1, \dots, P(t, T_K)w_K]'$, $z \neq 0$ 이다. 여기에 식 (2-11)의 무차익거래 제약조건을 부과하면 위의 행렬식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{P_1}(t, T_1) & \cdots & \sigma_{P_1}(t, T_K) \\ \sigma_{P_2}(t, T_1) & \cdots & \sigma_{P_2}(t, T_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{P_K}(t, T_1) & \cdots & \sigma_{P_K}(t, T_K) \\ \mu_p(t, T_1) - r_t & \cdots & \mu_p(t, T_K) - r_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t, T_1)w_1 \\ P(t, T_2)w_2 \\ \vdots \\ P(t, T_K)w_K \end{bmatrix} \equiv A_2 z = 0 \quad (2-13)$$

이와 같은 동차선형방정식 체계에서 자명해인 $z = 0$ 인 경우를 제외하면 계수행렬 A_2 의 위수(rank)가 N 인 경우, 즉 $rank(A_2) = N$ 인 경우에만 $z \neq 0$ 인 비자명해를 얻을 수 있다. 그리고 행렬 A_2 의 행의 수는 $N+1$ 임에 비해 위수가 N 이므로 $rank(A_2) = N$ 는 비자명해를 얻기 위해서 행렬 A_2 의 마지막 행이 나머지 행들의 선형결합으로 표현할 수 있음을 의미한다⁴⁾. 이는 A_2 의 마지막 행에서 각각의 원소가 나머지 행들의 동일한

4) 이러한 결과는 $K=N+1$ 개로 채권포트폴리오를 구성한 것에 따른 것이다. 무차익거래 조건은 $rank(A_2) = N$ 임을 의미하므로 보다 일반적인 $K > N+1$ 인 경

열의 원소들에 대한 선형결합으로 표현될 수 있음을 뜻하므로 비자명해가 개별채권의 만기에 의존하지 않음을 알 수 있다. 따라서 비자명해가 존재하기 위한 이러한 선형결합은 채권가격의 추세함수 벡터 $\mu(t, T)$ 에 대한 다음과 같은 제약조건으로 표현될 수 있다.

$$\mu_p(t, T) = r_t + \sum_{i=1}^N \lambda(X_t) \sigma_{P_i}(t, T) \quad (2-14)$$

여기에서 $\lambda_i(X_t)$ 는 i 번째 상태변수의 위험에 대한 시장가격을 나타낸다. 식 (2-14)에서 얻은 채권가격의 추세함수 벡터에 대한 제약조건을 채권가격에 대한 확률과정의 추세함수에 부과하면 채권가격결정을 위한 PDE를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j} \sigma_i(X) \sigma_j(X) \rho_{ij} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial P}{\partial X_i} [\mu_i(X) - \lambda_i(X) \sigma_i(X)] + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0$$

이는 SDF로 할인된 채권가격의 마팅게일 성질을 이용하여 얻은 식 (2-7)과 같음을 알 수 있다. 그리고 여기에 $P(T, T) = 1$ 의 경계조건을 부과하여 해를 구하면 채권가격을 얻을 수 있다.

3. 위험중립측도- Q 하의 채권가격과 측도변환

SDF를 이용한 채권가격결정식의 유도에서 언급한 바와 같이 Feynman-Kac 공식을 이용하면 식 (2-7)의 PDE에 대한 해는 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

우, Ross(1976)의 APT이론에 대한 증명에서와 같이 행렬 A_1 와 행렬 A_2 가 동일한 영공간(null space)을 가진다는 성질을 이용해서 채권가격의 추세함수에 대한 제약조건을 유도하는 것이 가능하다.

$$P(t, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r(X_s) ds} \right] \quad (2-15)$$

여기에서 $E_t^Q[\cdot]$ 는 t 시점까지 이용가능한 정보에 대한 위험중립측도- Q (risk-neutral measure, Q 측도) 하에서의 조건부 기대치를 나타낸다. 이때 Q 측도는 다음과 같은 상태변수의 위험중립측도 하의 확률과정으로부터 유도되는 것이다.

$$dX_t = [\mu(X_t) - \sigma(X_t)\lambda(X_t)]dt + \sigma(X_t)dW_t^Q \quad (2-16)$$

식 (2-15)의 위험중립측도 하의 채권가격은 식 (2-4)와 같이 설정된 SDF를 식 (2-5)에 직접 대입하는 방법으로도 얻을 수 있다. 식 (2-4)의 M_t 에 로그를 취한 후 Ito-lemma를 적용하여 얻은 로그SDF의 확률과정을 식 (2-5)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P(t, T) &= E_t^P [\exp(\log M_T - \log M_t)] \\ &= E_t^P \left[\exp \left(-\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda_s' \lambda_s ds - \int_t^T \lambda_s' dW_s \right) \right] \end{aligned} \quad (2-17)$$

$E^P[\cdot]$ 은 P 측도 하에서 기대치를 구한다는 것을 명시적으로 표현한 것이다. 식 (2-17)의 기대치를 계산하는 방법으로 측도변환(change of measure)을 이용하는 방법을 생각할 수 있다. 식 (2-17)에서 지수함수 부분의 두 번째와 세 번째 항으로부터 다음과 같이 $\frac{dQ}{dP}$ 를 정의하게 되면

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s' \lambda_s ds - \int_0^T \lambda_s' dW_s\right) \quad (2-18)$$

식 (2-17)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(t, T) = \frac{E_t^P \left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \frac{dQ}{dP} \right]}{E_t^P \left[\frac{dQ}{dP} \right]} = E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \right] \quad (2-19)$$

측도변환을 통하여 얻은 식 (2-19)는 Feynman-Kac 공식을 이용하여 얻은 채권가격결정을 위한 PDE의 해 식 (2-15)와 같아짐을 알 수 있다.

식 (2-19)의 유도과정에서 $\frac{dQ}{dP}$ 의 정의식 식 (2-18)은 P 측도를 Q 측도로 측도변환하기 위한 Radon-Nikodym derivative를 나타낸다. $\frac{dQ}{dP}$ 가 식 (2-18)과 같은 경우, Girsanov 정리에 의해서 위험중립측도- Q 하의 위너과정은 다음과 같이 얻어진다⁵⁾.

$$W_t^Q = W_t + \int_0^t \lambda_s ds \quad \Leftrightarrow \quad dW_t^Q = dW_t + \lambda_t dt \quad (2-20)$$

식 (2-20)을 식 (2-1)의 실질측도- P 하에서의 상태변수 X_t 의 확률과정에

5) Radon-Nikodym derivative dQ/dP 는 다음의 Novikov 조건(Novikov condition)이 충족하여야 한다.

$$E \left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s' \lambda_s ds\right) \right] < \infty$$

재무·금융과 관련한 Radon-Nikodym derivative와 Girsanov theorem에 대한 보다 자세한 논의는 Duffie(2001), Musiela and Rutkowski(2004)를 참조할 수 있을 것이다. 수학적 관점에서 보다 엄밀한 논의는 Karatzas and Shreve(1991)를 참조할 수 있다.

대입하여 정리하면 식 (2-16)의 위험중립측도- Q 하에서의 X_t 의 확률과정을 얻을 수 있다.

제 2 절 명시적 상태변수 이자율 기간구조모형

여기서는 채권가격에 영향을 주는 상태변수를 모형에 명시적으로 설정하여(explicit state variable labeling) 추정된 상태변수에 대한 해석이 용이한 모형을 위주로 살펴보고자 한다. 상태변수를 명시적으로 설정한 모형들은 대부분 일반적인 지수선형모형을 제시한 Duffie and Kan(1996) 이전의 연구들에서 제안되었다. 이러한 모형들은 명시적으로 설정된 상태변수를 가지고 있으므로 사후적으로 상태변수에 대한 해석이 용이하다는 장점이 있다. 그러나 일반적인 지수선형모형에 비해 지나치게 많은 제약이 부과된 모형이라는 단점을 가지고 있기도 하다. 또한 대부분의 모형들이 단기이자율을 중심으로 상태변수를 설정하고 있는 특징을 가진다.

1. 단일요인 이자율 기간구조모형

단일요인 이자율 기간구조모형은 채권가격에 영향을 미치는 상태변수가 하나인 경우를 나타낸다. 기존연구에서 대부분의 단일요인 모형들은 상태변수를 관측 가능한 단기이자율로 설정하였다. 여기서는 이러한 단일요인 모형들의 대표적인 예로서 Vasicek(1977)모형과 CIR(1985)모형을 간략하게 살펴보기로 한다.

(1) Vasicek모형

Vasicek모형에서 상태변수로 설정되는 단기이자율 확률과정은 Ornstein-Uhlenbeck 확산과정(diffusion process)이라고도 불리기도 하는

데 다음과 같은 평균회귀 연속시간확산과정(mean-reverting continuous time diffusion process)을 따른다.

$$dr_t = \kappa (\mu - r_t) dt + \sigma dW_t \quad (2-21)$$

여기에서 κ , μ , σ 는 양의 상수로 가정된다. 그리고 κ 는 평균회귀속도(speed of mean reversion), μ 는 평균금리(unconditional mean), σ 는 순간변동성(instantaneous volatility of the short rate)을 나타낸다. 이와 같은 평균회귀모형으로 설정된 Vasicek모형은 양의 확률로 음의 금리를 가질 수 있다는 단점이 있다.

Vasicek모형에서는 식 (2-21)과 같이 상태변수인 단기이자율을 설정한 다음, 위험에 대한 시장가격(market price of risk) $\lambda(r)$ 는 다음의 상수로 가정한다.

$$\lambda(r) = \lambda$$

이를 앞서 유도한 채권가격 $P(t, T)$ 를 결정하기 위한 기초편미분방정식(PDE) 식 (2-7)에 대입하고 경제조건을 부과하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma^2 + \frac{\partial P}{\partial r} [\kappa (\mu - r) - \lambda \sigma] + \frac{\partial P}{\partial t} - r P = 0 \\ P(T, T) = 1 \end{cases} \quad (2-21)$$

Vasicek모형과 함께 기본적인 이자율 기간구조모형인 CIR모형, Merton 모형 등은 다음과 같은 지수선형함수(exponential affine function) 형태의 채권가격결정식을 가지는 것으로 알려져 있다.

$$P(t, T) = \exp (A(\tau) + B(\tau) r_t) , \quad \tau = T - t \quad (2-22)$$

식 (2-22)의 채권가격결정식을 상태변수인 단기이자율 r 과 시간 t 에 대하여 미분하면, 식 (2-21)의 PDE에 나타난 편미분항들에 대한 결과를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = B(\tau) P(t, T) \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = B(\tau)^2 P(t, T) \\ \frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial \tau} = - [A'(\tau) + B'(\tau) r] P(t, T) \end{cases}$$

여기에서 $A'(\tau) = \frac{dA(\tau)}{d\tau}$ 와 $B'(\tau) = \frac{dB(\tau)}{d\tau}$ 이다. 이를 식 (2-21)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\left\{ \frac{1}{2} B^2(\tau) \sigma^2 + B(\tau) [\kappa (\mu - r) - \lambda \sigma] - A'(\tau) - B'(\tau) r - r \right\} P = 0$$

좌변을 채권가격 $P(t, T)$ 로 나눈 후 괄호안의 항들을 r 항을 포함하는 부분과 그렇지 않은 부분으로 나누어 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\left\{ \frac{1}{2} B^2(\tau) \sigma^2 + B(\tau) [\kappa \mu - \lambda \sigma] - A'(\tau) \right\} - \{ \kappa B(\tau) + 1 + B'(\tau) \} r = 0$$

위의 식은 모든 r 에 대하여 성립하여야 하는데 이는 식의 각 괄호 안의 상수항부분과 계수부분의 방정식들이 각각 동시에 0일 때만 가능하다. 따라서 각각의 괄호 안의 방정식들이 0이라는 조건을 적용하면 상미분방정식체계(ODE system)를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A'(\tau) = \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(\tau) + [\kappa \mu - \lambda \sigma] B(\tau) \\ B'(\tau) = -\kappa B(\tau) - 1 \end{cases} \quad (2-23)$$

그리고 식 (2-21)의 채권가격결정을 위한 편미분방정식의 경계조건 $P(T, T) = 1$ 은 다음과 같은 상미분방정식의(초기)경계조건으로 전환될 수 있다.

$$A(0) = 0, \quad B(0) = 0 \quad (2-24)$$

이를 이용하여 식 (2-23)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} A(\tau) = -\left(\mu - \frac{\lambda \sigma}{\mu}\right) \left[\tau + \frac{e^{-\kappa \tau} - 1}{\kappa}\right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\kappa^2}\right) \left[\frac{1 - e^{-2\kappa \tau} - 4(1 - e^{-\kappa \tau})}{2\kappa} + \tau\right] \\ B(\tau) = \frac{e^{-\kappa \tau} - 1}{\kappa} \end{cases}$$

(2) CIR모형

CIR(Cox, Ingersoll and Ross) 모형에서 단기이자율을 관측 상태변수로 설정하는 것은 Vasicek모형과 동일하지만 단기이자율의 확률과정을 다음과 같은 Feller 제곱근과정(Feller square root process)을 따른다는 점에서 다르다.

$$dr_t = \kappa (\mu - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t \quad (2-25)$$

여기에서 $\kappa > 0$ 는 평균회귀속도, μ 는 평균금리, σ 는 순간변동성을 나타낸

다. 식 (2-25)의 확률과정에 $2\kappa\mu > \sigma^2$ 의 제약조건을 부과하면 Vasicek모형과 달리 CIR모형은 단기이자율이 항상 비음(non-negative)이 되는 특징을 가진다. 그리고 단기이자율의 변동성항($\sigma\sqrt{r_t}$)이 단기이자율의 제곱근에 비례하는 것으로 설정되어 있으므로 확률변동성의 특징을 가지고 있다. CIR모형에서는 위험에 대한 시장가격을 $\lambda(r) = \lambda\sqrt{r} / \sigma$ 로 가정한다.

CIR모형에서도 Vasicek모형에서처럼 채권가격결정식이 식 (2-22)와 같이 지수선형함수 형태를 가지는 것으로 가정된다. 앞서 살펴본 Vasicek모형에서와 동일한 과정을 통하여 $A(\tau)$ 와 $B(\tau)$ 에 대한 상미분방정식을 유도하고 그 해를 구하면 다음과 같다. 해의 유도과정은 Vasicek 모형과 동일하므로 생략하기로 한다.

$$\begin{cases} B(\tau) = \frac{-2(1 - e^{-\gamma\tau})}{2\gamma + (\kappa + \lambda - \gamma)(1 - e^{-\gamma\tau})} \\ A(\tau) = \frac{2\kappa\mu}{\sigma^2} \log \left[\frac{2\gamma \frac{e^{(\kappa + \lambda - \gamma)}}{2}}{2\gamma + (\kappa + \lambda - \gamma)(1 - e^{-\gamma\tau})} \right] \end{cases}$$

여기에서 $\gamma = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$ 이다. CIR모형은 명시적으로 단기이자율이 비음이라는 제약을 부과하고자 하는 경우 이용할 수 있는 모형이라는 특징을 가진다.

(3) Inverted square root model

Ahn and Gao(1999)에 의해 제시된 AG 모형이라고도 불리는 Inverted square root 모형(이후 ISRM)은 Vasicek모형과 CIR모형과 같이 단기이자율을 상태변수로 설정하지만 상태변수인 단기이자율의 추세항이 단기이자율의 비선형 함수이다.

$$dr_t = \kappa (\mu - r_t) r_t dt + \sigma r_t^{3/2} dW_t \quad (2-26)$$

여기에서 평균회귀 파라미터는 $\kappa > 0$ 인데, Vasicek모형과 CIR모형에서처럼 평균회귀속도가 상수가 아니라 $2\kappa r_t$ 로 단기이자율 수준의 함수가 되어 이자율 수준이 높을수록 평균회귀속도가 더 빠르고 이자율이 낮을수록 평균회귀 속도가 느린 특징을 설명할 수 있다. 그리고 확률변동성을 설명하기 위하여 단기이자율 확률과정의 변동성항이 단기이자율의 제곱근이 아니라 $r_t^{3/2}$ 으로 설정되어 있다. 이와 같은 모형의 특징으로 인해 식 (2-26)의 단기이자율 확률과정을 Inverted Square Root 모형이라고 한다.

ISRM에서는 위험의 시장가격 $\lambda(r)$ 이 다음과 같이 단기이자율에 대한 U자형의 함수로 제시된다.

$$\lambda(r_t) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{r_t}} + \lambda_2 \sqrt{r_t}$$

이러한 $\lambda(r)$ 와 식 (2-26)의 상태변수 확률과정을 식 (2-7)의 기초편미분 방정식에 대입하고 경제조건 $P(T, T) = 1$ 을 적용하여 편미분방정식을 풀면 해석적인 채권가격결정식을 얻을 수 있다⁶⁾.

$$P(t, T) = \frac{\Gamma(\beta - \gamma)}{\Gamma(\beta)} M(\gamma, \beta, -x(r, t, T)) x(r, t, T)^\gamma$$

6) $M(a, b, x)$ 는 Confluent hypergeometric 함수 또는 Kummer 함수라고 하며 다음과 같다.

$$M(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(b)_n n!} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{xz} z^{a-1} (1-z)^{b-a-1} dz$$

여기에서 $(a)_n \equiv a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)$, $(a)_0 \equiv 1$ 이다. $P(t, T)$ 유도과정에 대한 보다 자세한 설명은 Ahn and Gao(1999)를 참조할 수 있다.

여기서 $x(r, t, T) = \frac{2(\kappa\mu - \lambda_1)}{\sigma^2(e^{(\kappa\mu - \lambda_1)(T-t)} - 1)}r_t$, $\beta = \frac{2}{\sigma^2}[\kappa + \lambda_2 + (1 + \gamma)\sigma^2]$, $\phi = \kappa + \lambda_2 + \frac{1}{2}\sigma^2$, $\gamma = \frac{1}{\sigma^2}[\sqrt{\phi^2 + 2\sigma^2} - \phi]$ 이며 $\Gamma(\cdot)$ 는 감마함수를 나타낸다.

ISRM은 Ait-Sahalia(1996), Stanton(1997), Chen et al.(1992) 등의 연구에서 제시된 단기이자율에 대한 실증적 특성인 추세항의 비선형성과 확률변동성을 단기이자율 과정에 반영할 수 있도록 모형화하고자 노력한 결과이다.

이상에서 단일요인 이자율 기간구조모형을 살펴보았다. 단일요인 이자율 기간구조모형은 비교적 다루기 용이하다는 장점이 있으나 현실에서 관측되는 이자율기구조에 대한 적합성(goodness-of-fit) 측면이나 그 활용성 측면에서 한계점을 가진다. 첫째, 단일요인 기간구조 모형은 서로 다른 만기의 채권수익률이 하나의 상태변수에 의해 결정되므로 모든 채권수익률이 완전상관관계를 가진다. 채권수익률의 완전상관관계는 이자율 기간구조모형을 리스크관리나 헤징 등의 목적에 활용할 수 없음을 뜻한다. 이러한 한계점은 파생상품 가격결정을 목적으로 하는 단일요인 차익거래모형에도 동일하게 적용된다. 둘째, 단일요인 이자율 기간구조모형은 단조증가(monotone increasing), 단조감소(monotone decreasing), 혹모양(hump-shaped) 등의 기간구조를 설명할 수는 있지만 뒤집힌 혹모양(inverted hump-shaped)의 기간구조를 설명할 수 없어 제한된 형태의 기간구조를 적합한다. 이와 같은 한계점들을 극복하기 위해서는 단일요인 기간구조 모형을 다요인 모형으로 확장하는 것이 필요하다.

2. 다요인 이자율 기간구조모형

여기서는 다요인 이자율 기간구조모형에 대해 간략하게 살펴보기로 한

다. 대부분의 다요인 이자율 기간구조모형들은 단일요인 이자율 기간모형에서 이용된 상태변수의 확률과정, 즉 Vasicek모형의 Ornstein-Uhlenbeck 과정 또는 CIR모형의 Feller Square Root 과정의 결합으로 구성된다. 그러므로 여기서는 특수한 경우를 제외하고 이들 확률과정에 포함된 모수와 모수에 대한 제약에 관한 설명은 생략하고 모형의 특징을 위주로 살펴보기로 한다.

(1) Gaussian central tendency 모형

Beaglehole and Tenny(1991)와 Jegadeesh and Pennacchi(1996)는 단기 이자율과 단기이자율의 시변평균을 상태변수로 하는 이요인 가우시언 과정(two-factor Gaussian process) 모형을 제안하였다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\mu_t - r_t) dt + \sigma_1 dW_{1t} \\ d\mu_t = \kappa_2 (\theta - \mu_t) dt + \sigma_2 dW_{2t} \\ E(dW_{1t} dW_{2t}) = \rho dt \end{cases} \quad (2-27)$$

식 (2-27)과 같이 상태변수의 확률과정이 정의되면 채권가격결정을 위한 각각의 위험에 대한 시장가격은 상수 λ_1 과 λ_2 로 가정된다. 위의 모형을 자세히 보면 단기금리와 시변평균 이자율이 Vasicek모형으로 설정된 것을 알 수 있다. 식 (2-27)은 이후 살펴보게 될 Duffie and Kan(1996)에서 제시된 지수선형모형의 한 형태로 볼 수 있다. 따라서 채권가격 $P(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$P(t, t + \tau) = \exp [A(\tau) + B_1(\tau)r_t + B_2(\tau)\mu_t] \quad (2-28)$$

식 (2-27)과 식 (2-28) 그리고 상수인 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ 를 식 (2-7)의 채권

가격결정을 위한 편미분방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 PDE를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} B_1^2(\tau) \sigma_1^2 + \frac{1}{2} B_2^2(\tau) \sigma_2^2 + B_1(\tau) B_2(\tau) \rho \sigma_1 \sigma_2 + B_1(\tau) [\kappa_1(\mu - r) - \lambda_1 \sigma_1] \\ & + B_2(\tau) [\kappa_2(\theta - \mu) - \lambda_2 \sigma_2] - A'(\tau) - B_1'(\tau)r - B_2'(\tau)\mu - r = 0 \end{aligned} \quad (2-29)$$

식 (2-29)는 모든 r 과 μ 에 대해서 성립해야 하므로 이를 상수항, r , 그리고 μ 에 대하여 정리하면 다음과 같은 상미분방정식체계(ODE system)를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} B_1'(\tau) = -\kappa_1 B_1(\tau) - 1 \\ B_2'(\tau) = \kappa_1 B_1(\tau) - \kappa_2 B_2(\tau) \\ A'(\tau) = \frac{1}{2} \sigma_1^2 B_1^2(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 B_2^2(\tau) + \rho \sigma_1 \sigma_2 B_1(\tau) B_2(\tau) - \lambda_1 \sigma_1 B_1(\tau) \\ \quad + (\kappa_2 \theta - \lambda_2 \sigma_2) B_2(\tau) \end{cases} \quad (2-30)$$

그리고 $P(T, T) = 1$ 의 경계조건으로부터 $A(0) = 0$, $B_1(0) = 0$, $B_2(0) = 0$ 의 초기경계조건을 얻을 수 있다. 이 상미분방정식체계의 해를 구하면 다음과 같다⁷⁾.

7) $A(\tau)$ 의 구체적인 해는 길고 복잡하므로 생략한다. $A(\tau)$ 의 구체적인 해는 Beaglehole and Tenny(1991) 또는 Jegadesh and Pennacchi(1996)에 제시되어 있으므로 이를 참고할 수 있다.

$$\begin{cases} B_1(\tau) = \frac{e^{-\kappa_1 \tau} - 1}{\kappa_1} \\ B_2(\tau) = \frac{e^{-\kappa_2 \tau} - 1}{\kappa_2} - \frac{e^{-\kappa_1 \tau} - e^{-\kappa_2 \tau}}{\kappa_1 - \kappa_2} \end{cases} \quad (2-31)$$

이를 보면 단기금리에 대한 계수함수 $B_1(\tau)$ 는 Vasicek모형에서 얻은 것과 동일함을 알 수 있다.

(2) Fong-Vasicek모형

Fong and Vasick(1991)은 단기이자율과 그 변동성을 상태변수로 가지는 모형을 제안하였다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\mu - r_t) dt + \sqrt{V_t} dW_{1t} \\ dV_t = \kappa_2 (\alpha - V_t) dt + \eta \sqrt{V_t} dW_{2t} \\ E(dW_{1t} dW_{2t}) = \rho dt \end{cases} \quad (2-32)$$

이를 보면 단기이자율은 Vasicek모형으로, 확률변동성은 CIR모형으로 설정되어 있다. 그리고 각각의 위험에 대한 리스크 프리미엄은 다음과 같이 가정하였다.

$$\lambda_i(\cdot) = \lambda_i \sqrt{V} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (2-33)$$

상태변수와 위험의 시장가격을 식 (2-32)와 식 (2-33)에서와 같이 가정한 경우에도 Duffie and Kan(1996)의 지수선형모형에 해당되므로 채권 가격 $P(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$P(t, t + \tau) = \exp [A(\tau) + B_1(\tau) r + B_2(\tau) V] \quad (2-34)$$

이제 식 (2-31)~식 (2-34)를 식 (2-7)의 채권가격결정을 위한 기초편미분방정식에 대입하여 식 (2-29)에서와 같이 정리한 다음, 모든 r 과 V 에 대하여 항상 성립하도록 하는 조건을 부과하면 다음과 같은 상미분방정식체계(ODE system)를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} B_1'(\tau) = -\kappa_1 B_1(\tau) - 1 \\ B_2'(\tau) = \frac{1}{2} B_1^2(\tau) + \frac{1}{2} \eta^2 B_2^2(\tau) + \rho \eta B_1(\tau) B_2(\tau) - \lambda_1 B_1(\tau) - (\kappa_2 + \lambda_2 \eta) B_2(\tau) \\ A'(\tau) = \kappa_1 B_1(\tau) + \kappa_2 \alpha B_2(\tau) \end{cases}$$

여기서도 마찬가지로 $P(T, T) = 1$ 의 경계조건으로부터 $A(0) = 0$, $B_1(0) = 0$, $B_2(0) = 0$ 의 초기경계조건을 얻을 수 있다. $B_1'(\tau)$ 에 대한 방정식을 보면 이는 Vasicek모형에서와 같음을 알 수 있다. Fong and Vasicek(1991)은 해석해를 제시하고 있지 않지만 Selby and Strickland (1995)는 그 해석해를 제시하고 있다. 구체적인 해의 형태가 다소 복잡하므로 여기서는 생략하기로 한다.

(3) Vasicek Model with a stochastic market price of risk

Lund(1999)는 단기이자율과 위험에 대한 시장가격을 상태변수로 설정하고 이 상태변수들이 Vasicek모형에서와 같이 Ornstein-Uhlenbeck 과정을 따르는 모형을 제안하였다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\mu_1 - r_t) dt + \sigma_1 dW_{1t} \\ d\lambda_t^* = \kappa_2 (\mu_2 - \lambda_t^*) dt + \sigma_2 dW_{2t} \\ E(dW_{1t} dW_{2t}) = \rho dt \end{cases} \quad (2-35)$$

여기에서 상태변수가 $X_t = (r_t, \lambda_t^*)'$ 으로 설정된 점을 주목할 필요가 있다. Lund(1999)는 각각의 위험에 대한 시장가격은 다음과 같이 가정하였다.

$$\lambda(X_t) = \begin{bmatrix} -\lambda_t^* \kappa_1 / \sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

그리고 $\kappa_2 > 0$ 의 제약 하에서 Novikov 조건이 충족되므로 Girsanov 정리를 적용하여 Q 측도하의 상태변수 $X_t = (r_t, \lambda_t^*)'$ 의 확률과정을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} dr_t = \{ \kappa_1 (\mu_1 - r_t) + \kappa_1 \lambda_t^* \} + \sigma_1 dW_{1t}^Q \\ d\lambda_t^* = \kappa_2 (\mu_2 - \lambda_t^*) dt + \sigma_2 dW_{2t}^Q \end{cases} \quad (2-37)$$

단기이자율의 위험에 대한 시장가격을 상태변수로 설정한 경우에도 식 (2-37)과 같이 Q 측도 하의 확률과정이 얻어지므로 Duffie and Kan(1996)의 지수선형모형에 포함된다. 따라서 채권가격 $P(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$P(t, t + \tau) = \exp [A(\tau) + B(\tau)r_t + C(\tau)\lambda_t^*] \quad (2-38)$$

식 (2-35)과 식 (2-36) 그리고 식 (2-38)을 식 (2-7)의 채권가격결정을 위한 편미분방정식에 대입하여 식 (2-29)와 같이 정리한 다음, 모든 r 과 λ^* 에 대하여 항상 성립하도록 하는 조건을 부과하면 다음의 상미분방정식체계(ODE system)를 얻을 수 있다⁸⁾.

$$\begin{cases} A'(\tau) = \kappa_1 \mu_1 B(\tau) + \kappa_2 \mu_2 C(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 B^2(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 C^2(\tau) \\ B'(\tau) = -\kappa_1 B(\tau) - 1 \\ C'(\tau) = -\kappa_2 C(\tau) + \kappa_1 B(\tau) \end{cases} \quad \text{식 (2-39)}$$

8) 상미분방정식체계의 명시적인 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \int_0^\tau A'(s) ds \\ &= -(\mu_1 + \mu_2)\tau + \left(\mu_1 - \frac{\kappa_2 \mu_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa_1 \tau}}{\kappa_1} + \mu_2 \left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa_2 \tau}}{\kappa_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{\kappa_1^2} \left(\tau - 2 \frac{1 - e^{-\kappa_1 \tau}}{\kappa_1} + \frac{1 - e^{-2\kappa_1 \tau}}{2\kappa_1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \left\{ \frac{\tau}{\kappa_2^2} + \frac{2}{\kappa_2(\kappa_1 - \kappa_2)} \frac{1 - e^{-\kappa_1 \tau}}{\kappa_1} + \frac{1}{(\kappa_1 - \kappa_2)^2} \frac{1 - e^{-2\kappa_1 \tau}}{2\kappa_1} \right. \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{\kappa_2(\kappa_1 - \kappa_2)} + \frac{1}{(\kappa_1 - \kappa_2)^2} \right) \frac{1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2)\tau}}{\kappa_1 + \kappa_2} \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{\kappa_2^2} + \frac{1}{\kappa_2(\kappa_1 - \kappa_2)} \right) \frac{1 - e^{-\kappa_2 \tau}}{\kappa_2} \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\kappa_2^2} + \frac{2}{\kappa_2(\kappa_1 - \kappa_2)} + \frac{1}{(\kappa_1 - \kappa_2)^2} \right) \frac{1 - e^{-2\kappa_2 \tau}}{2\kappa_2} \right\} \\ B(\tau) &= \frac{e^{-\kappa_1 \tau} - 1}{\kappa_1} \\ C(\tau) &= \frac{e^{-\kappa_2 \tau} - 1}{\kappa_2} - \frac{e^{-\kappa_1 \tau} - e^{-\kappa_2 \tau}}{\kappa_1 - \kappa_2} \end{aligned}$$

여기서도 역시 $P(T, T) = 1$ 의 경계조건으로부터 $A(0) = 0$, $B(0) = 0$, $C(0) = 0$ 의 초기경계조건을 얻을 수 있다. 미분방정식체계에서 $B'(\tau)$ 의 방정식은 Vasicek모형에서와 같으므로 그 해 또한 Vasicek모형과 같음을 알 수 있다.

제 3 절 일반적인 이자율 기간구조모형

여기서는 앞서 살펴본 대부분의 모형을 포함하는 보다 일반적인 모형인 지수선형모형(exponential affine term structure model, 이하 ATSM)과 지수이차 가우시언모형(exponential quadratic gaussian term structure model, 이하 QTSM)에 대해서 살펴보기로 한다. ATSM과 QTSM이라는 명칭에서 알 수 있듯이 ATSM은 무이표채가격 $P(t, T)$ 가 상태변수에 대한 지수선형함수로 도출되는 모형을 뜻하며, QTSM은 $P(t, T)$ 가 상태변수에 대한 지수이차함수 도출되는 모형을 뜻한다. 앞서 살펴본 모형들과 달리 ATSM이나 QTSM에서는 기본적으로 상태변수 X_t 를 미관측변수(unobserved latent variable)로 설정하는 차이점이 있다. 상태변수를 미관측변수로 설정하는 경우, 제 2장 2절의 명시적 상태변수를 가지는 모형과 달리 상태변수에 대한 사전적인 가정뿐만 아니라 사후적 해석이 용이하지 않다. ATSM 또는 QTSM을 이용한 대부분의 실증분석에서 사후적으로 상태변수를 수준(level), 기울기(slope), 곡률 또는 곡도(curvature)로 해석하고 있지만 이는 논의의 편의를 위한 것이지 실질적으로 상태변수를 이렇게 명명할 근거는 없다. 또한 그러한 근거가 있다고 하더라도 충분하지 않다⁹⁾.

다요인 모형으로 이자율 기간구조모형을 일반화할 때 식 (2-7)의 채

9) 이 후 일반적인 ATSM과 QTSM모형에 대한 논의에서 알 수 있듯이 상태변수가 미관측인 경우, 단기이자율 r_t 또는 채권가격 $P(t, T)$ 를 변화시키지 않는 불변변환(invariant transformations)을 이용하면 추출된 상태변수를 다른 특성을 가지는 상태변수로 변환하는 것이 가능하기 때문이다.

권가격결정을 위한 기초편미분방정식의 해석해(analytical solution)를 구하는 것이 어렵거나 불가능하므로 이를 수치적으로 구해야만 한다. 그러나 수치적인 방법을 이용하여 해를 구하는 경우에도 상태변수의 수가 증가함에 따라서 그 복잡도(complexity)가 증가하게 되어 수치적으로 해를 구하는 것조차 용이하지 않을 수 있다. 이에 Duffie and Kan(1996, 이하 DK)은 일정한 조건을 충족하도록 모형을 설정하는 경우 상태변수 X_t 에 대한 지수선형모형으로 해석적인 채권가격을 얻을 수 있는 필요충분조건을 제시하였다. 이들이 제시한 지수선형모형은 Dai and Singleton(2000, 이하 DS)의 연구에서 보다 일반적인 형태로 제시되었다. 앞 절에서 살펴본 이자율 기간구조모형 가운데 ISRM(AG 모형)을 제외한 나머지 모형들은 모두 여기서 살펴보게 될 지수선형모형의 특수한 형태로 볼 수 있다.

ISRM에서 살펴본 것과 같이 현실의 이자율은 비선형성과 확률변동성을 가질 수 있는데, ATSM은 이러한 비선형성과 확률변동성을 설명하기에 충분하지 않을 수 있다. QTSM은 ATSM이 현실에서 관측되는 이자율기간구조의 실증적 특성들을 설명하지 못하는 것에 대한 대안으로 제시된 모형이라 할 수 있다. 이러한 인식하에 QTSM에 대한 연구는 Longstaff(1989), Beaglehole and Tenney(1991), Constantinide(1992), Ahn et al.(2002, 이하 ADG), Leippold and Wu(2002) 등이 있다. 일반적인 QTSM에 대한 연구는 Leippold and Wu(2002)와 Ahn et al.(2002)에 의해 제시되었는데, DK와 DS의 연구에서와 유사하게 일정한 조건을 충족하도록 모형을 설정하는 경우 QTSM은 채권가격 $P(t, T)$ 를 상태변수에 대한 지수이차함수로 나타낼 수 있다.

1. 지수선형모형

먼저, DK와 DS의 지수선형모형(exponential affine term structure model, 이하 ATSM)에 대해 살펴보자. DK의 연구에서 제시된 채권가격이 상태변수에 대한 지수선형함수로 얻어지기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- 단기이자율 r_t 는 상태변수벡터 X_t 의 선형함수(affine function)이다.
- Q 측도 하에서 상태변수 확률과정 dX_t 의 추세항은 X_t 의 선형함수이다.
- Q 측도 하에서 상태변수 확률과정 dX_t 의 조건부공분산행렬은 X_t 의 선형함수이다.

ATSM은 단기이자율 r_t 와 상태변수 X_t 가 이러한 필요충분조건들을 충족하도록 설정된 모형이다. 만기시점이 $T > t$ 인 무이표채의 t 시점의 가격은 다음과 같다.

$$P(t, T) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(X_s) ds \right) \right]$$

DK의 필요충분조건을 충족하도록 상태변수와 단기이자율을 가정하면 N 요인 ATSM을 얻을 수 있다. DK와 DS가 제시한 ATSM에서는 Q 측도 하에서 $(N \times 1)$ 상태변수벡터 X_t 는 다음과 같은 확률과정을 따른다.

$$dX_t = K^Q (\Theta^Q - X_t) dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t^Q \quad (2-40)$$

여기서 K^Q 와 Σ 는 $(N \times N)$ 행렬, Θ^Q 는 $(N \times 1)$ 벡터, W_t^Q 는 Q 측도 하의 서로 독립인 N 차원 표준위너과정이다. 그리고 $\sqrt{S_t}$ 는 다음의 원소를 대각 원소로 가지는 대각행렬이다.

$$\{ \sqrt{S_t} \}_{ii} = \sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2-41)$$

여기서 α_i 는 스칼라 값이고 β_i 는 $(N \times 1)$ 벡터이다. β_i 는 N 개의 상태변수

중 어떤 상태변수가 i 번째 상태변수의 조건부변동성에 영향을 주는가를 결정하는 계수이다. 식 (2-40)과 같이 설정된 X_t 의 확률과정에서 X_t 의 충격항들(innovations) 사이의 의존관계는 $(N \times N)$ 행렬 Σ 에 의해서 결정된다. 다소 엄밀성이 결여된 표현일 수 있지만 이러한 의존관계는 다음 식을 통해 확인할 수 있다.

$$Cov_t(dX_t) = \Sigma S_t \Sigma' dt$$

이 공분산행렬의 각각의 원소는 다음과 같다.

$$\{Cov_t(dX_t)\}_{ij} = Cov_t(dX_{it}, dX_{jt}) = \sum_{k=1}^N \Sigma_{ik} \Sigma_{jk} \{S_t\}_{kk} dt$$

식 (2-40)과 같은 상태변수의 확률과정은 DK의 필요충분조건을 충족한다. 그리고 단기이자율은 상태변수의 선형함수로 다음과 같이 정의된다.

$$r_t = r(X_t) = \delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_{Xi} X_{it} = \delta_0 + \delta_X' X_t \quad (2-42)$$

식 (2-40), 식 (2-41) 그리고 식 (2-42)와 같이 상태변수와 단기이자율을 설정하면 DK의 필요충분조건이 충족되므로 상태변수에 대한 지수선형 함수인 무이표채가격 $P(t, T)$ 를 얻을 수 있다.

$$P(t, T) = \exp [A(\tau) + B(\tau)' X_t] , \quad \tau = T - t \quad (2-43)$$

여기서 $A(\tau)$ 는 스칼라이고 $B(\tau)$ 는 $(N \times 1)$ 벡터이다. 식 (2-43)과 같이 채권가격이 주어지면, 무이표채의 만기수익률 $Y(t, T)$ 는 다음과 같다.

$$Y(t, T) = -\frac{1}{\tau} [A(\tau) + B(\tau)'X_t], \quad \tau = T-t$$

식 (2-40)부터 식 (2-42)까지를 식 (2-7)의 채권가격결정을 위한 기초편미분방정식에 대하여 정리하면 $A(\tau)$, $B(\tau)$ 에 대한 상미분방정식체계를 얻을 수 있다. 논의의 편의를 위하여 식 (2-7)을 행렬대수를 이용하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다

$$\frac{1}{2}tr\left[\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial X'} \Sigma S_t \Sigma'\right] + \frac{\partial P}{\partial X} [K^Q(\Theta^Q - X_t)] + \frac{\partial P}{\partial t} - [\delta_0 + \delta_X' X_t] P = 0 \quad (2-7')$$

여기에서 $tr(\cdot)$ 는 행렬에 대한 트레이스 연산자(trace operator)를 나타낸다. 제 2장 2절에서와 동일한 방법으로 식 (2-40)부터 식 (2-42)까지를 식 (2-7')에 대입하여 정리한 후, 모든 X_t 에 대하여 성립하도록 하는 조건을 부과하면 다음과 같은 상미분방정식체계를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \Theta^{Q'} K^{Q'} B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \alpha_i - \delta_0 \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} = -K^{Q'} B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \beta_i - \delta_X \end{cases} \quad (2-44)$$

$P(T, T) = 1$ 의 경계조건으로 얻어지는 $A(0) = 0$, $B(0) = \mathbf{0}$ 의 초기치를 이용하면 Runge-Kutta법과 같은 수치적인 방법으로 식 (2-44)를 풀 수 있다.

이상의 채권가격 결정과정을 살펴보면 모든 논의가 Q 측도 하에서 이루어지고 있음을 알 수 있다. Q 측도 하에서 도출된 DK의 ATSM은 파생상품의 가격결정을 목적으로 하는 경우에는 유용할 수 있다. 하지만 이자율기간구조와 같이 채권수익률의 시계열적인 특성을 실증적으로 분석하기 위해서는 P 측도 하의 모형으로 변환하는 것이 필요하다.

DS는 식 (2-40)에서 정의된 Q 측도 하의 상태변수 X_t 의 확률과정을 P 측도 하의 확률과정으로 변환하기 위해 상태변수의 위험에 대한 시장가격(market price of risk) λ_t 를 다음과 같이 가정하였다.

$$\lambda_t = \sqrt{S_t} \lambda \quad (2-45)$$

여기서 λ 는 $(N \times 1)$ 벡터이다. λ_t 가 식 (2-45)와 같이 설정되면 Girsanov 정리를 이용하여 P 측도 하에 X_t 의 확률과정을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dX_t = K(\Theta - X_t)dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t \quad (2-46)$$

여기서 W_t 는 P 측도 하의 서로 독립인 N 차원 표준위너과정이며 $K = K^Q - \Sigma\Phi$, $\Theta = K^{-1}(K^Q\Theta^Q + \Sigma\psi)$, $\Phi = [\lambda_1\beta_1, \dots, \lambda_i\beta_i, \dots, \lambda_N\beta_N]'$, $\psi = [\lambda_1\alpha_1, \dots, \lambda_i\alpha_i, \dots, \lambda_N\alpha_N]'$ 이다. Φ 는 i 번째 행이 $\lambda_i\beta_i'$ 인 $(N \times N)$ 행렬이며, ψ 는 i 번째 원소가 $\lambda_i\alpha_i$ 인 N 차원 벡터이다. 식 (2-46)에서 X_t 의 확률과정은 Q 측도 하에서와 마찬가지로 추세항과 조건부공분산행렬이 상태변수의 선형함수임을 알 수 있다.

식 (2-46)과 같은 P 측도 하의 상태변수에 대한 확률과정을 얻었다고 하더라도 이를 곧바로 실증분석에 이용할 수는 없다. DS는 이를 위해 식 (2-46)의 확률과정이 정의되기 위한 허용조건(admissibility condition)과 식 (2-42)과 식 (2-43) 그리고 식 (2-45)와 식 (2-46)에 포함된 파라미터를 식별하기 위한 식별조건(identification conditions)¹⁰⁾을 제시하였다. 식

10) Duffie and Kan(1996)은 N 개의 만기수익률을 상태변수로 선택하여 Q 측도 하에 상태변수의 확률과정을 직접 설정하는 'reference yield factor' 방법을 이용하였다. 이와 같이 관측된 수익률을 상태변수로 설정하는 경우 파라미터에 대한 식별문제는 발생하지 않는다. 그러나 이들 수익률에 해당하는 채권이 시장에서 거래되는 채권이므로 채권가격에 오류(pricing error)가 없도록 파라미터에 제약을 부과하는 것이 요구된다. 실증분석에서 이러한 제약을 부과하는 것이 복잡할 뿐만 아니라 때로는 가능하지 않을 수 있다.

(2-46)의 확률과정은 일반적으로 모든 상태변수의 변동성을 유발하는 변수의 확률과정과 그렇지 않은 변수의 확률과정으로 구성된다. 그런데 이 가운데 상태변수의 변동성을 유발하는 과정은 항상 양이라는 조건(positivity condition)이 충족되어야 하므로 이러한 조건을 충족하도록 모형의 파라미터에 제약을 부과하여야 한다. DS는 이러한 조건을 허용조건이라고 하였다. 허용조건은 변동성을 유발하는 요인의 수가 많을수록 보다 엄격해진다. 또한 식 (2-46)의 상태변수는 미관측 변수로 가정되는데 이 경우 식 (2-42)와 식 (2-43), 그리고 식 (2-45)와 식 (2-46)으로 구성되는 모형에 포함된 파라미터 $\{K, \Theta, \Sigma, \alpha, B \equiv (\beta_1, \dots, \beta_N)\}$ 을 유일하게 식별할 수 없는 문제가 발생한다. DS는 파라미터 식별의 문제를 해결하기 위한 제약조건을 제시하였다. 이러한 허용조건과 식별조건을 부과한다고 하더라도 모든 상황을 포괄하는 일반적인 모형을 설정하는 것이 불가능하므로 DS는 서로를 포함하지 않는 모형군(a class of nonnested models)으로 ATSM을 분류하고 그 표준형태(canonical form)를 제시하였다.

상태변수의 확률과정에 변동성을 유발하는 상태변수의 수를 m , 즉 $m = \text{rank}(B)$ 이라 할 때, DS는 $m = 0, 1, \dots, N$ 에 따라서 최소한의 허용조건과 식별조건을 충족하면서 서로를 포함하지 않는 가장 유연한 N 요인 모형군들로 ATSM모형을 분류하고 표준형태를 제시하였다. DS의 분류에 따라서 이러한 모형군에 포함되는 모형을 $A_m(N)$ 이라 할 때 그 표준형태는 다음과 같다.

DS의 표준형태 $A_m(N)$ 은 허용조건과 식별조건을 충족하면서 단기이자율 r_t 또는 채권가격 $P(t, T)$ 를 변화시키지 않는 불변변환(invariant transformations)¹¹⁾을 적용한 모형을 포함한다. $A_m(N)$ 의 허용조건과 식별조건 외에도 상태변수의 안정성(stationarity)를 위해서 DS는 K 의 모든 고유값(eigenvalue)들이 0보다 커야 한다는 제약을 부과하고 있으나 K 의 모든 고유치들이 실수라는 지나친 제약을 포함하고 있다. 최근의

11) ATSM에 대한 단기이자율 또는 채권가격 불변변환에 대한 보다 자세한 논의는 Dai and Singleton(2000), Singleton(2006)을 참고할 수 있다.

정의[Dai and Singleton(2000)] : 표준형태 $A_m(N)$ (canonical form of $A_m(N)$)

상태변수에 변동성을 유발하는 상태변수의 수 m 에 따라서 N 차원의 상태변수벡터를 $X_t = (X_t^{B'}, X_t^{D'})'$ 로 분할할 수 있다. 여기에서 X_t^B 는 m 차원벡터를 나타내며 X_t^D 는 $N-m$ 차원벡터를 나타낸다. 표준형태 $A_m(N)$ 모형은 상태변수의 확률과정 식 (2-46)과 단기이자율 식 (2-42)에 포함된 파라미터들 $\{K, \Theta, \Sigma, \alpha, B \equiv (\beta_1, \dots, \beta_N)\}$ 이 다음과 같은 설정(specification)과 제약조건을 충족하도록 설정된 모형이다.

$$K = \begin{bmatrix} K_{m \times m}^{BB} & 0_{m \times (N-m)} \\ K_{(N-m) \times m}^{DB} & K_{(N-m) \times (N-m)}^{DD} \end{bmatrix}, \quad \text{for } m > 0$$

$m=0$ 인 경우, K 는 상삼각행렬 또는 하삼각행렬(upper or lower triangular matrix)로 설정된다.

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{m \times 1}^B \\ 0_{(N-m) \times 1} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = I, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0_{m \times 1} \\ 1_{(N-m) \times 1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & B_{m \times (N-m)}^{BD} \\ 0_{(N-m) \times m} & 0_{(N-m) \times (N-m)} \end{bmatrix}$$

$$\delta_i \geq 0, \quad m+1 \leq i \leq N,$$

$$K_i \Theta = \sum_{j=1}^m K_{ij} \Theta_j > 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$K_{ij} \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad j \neq i$$

$$\Theta_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$B_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad m+1 \leq j \leq N$$

연구에 따르면 안정성을 위해서는 K 의 고유치가 복소수일 경우까지 포함하여 고유치의 실수부가 0보다 크다는 제약으로 완화시킬 수 있다. DS의 표준형태와 같이 모형이 설정되는 경우 Q 측도와 P 측도 하의 상태변수의 확률과정을 나타내는 식 (2-40)과 식 (2-46)에서 상태변수들의 상관관계는 K^Q 와 K 행렬의 비대각원소에 의해 결정되며, 조건부변동성은 $\sqrt{S_t}$ 의 대각원소의 형태에 의해 결정된다.

DS의 $A_m(N)$ 모형에서는 확률변동성을 설명하기 위하여 변동성요인의 수(m)를 증가시키게 되면 이들 m 개의 변동성요인 상태변수들 사이에는 양의 상관관계만이 허용된다. 그리고 전체 N 개의 상태변수들 사이에 음의 상관관계를 허용하는 것이 어려워진다는 한계점이 있다. 상태변수간의 음의 상관관계를 허용하기 위하여 m 을 줄이는 경우에는 확률변동성을 설명하기 어려워질 뿐만 아니라 단기이자율이 양의 확률로 음의 값을 가질 수 있는 문제가 발생한다. 또한 이자율이 음이 되지 않도록 설정하고자 하는 경우에는 $m=N$ 으로 설정하는 것이 필요한데 이 경우 모든 상태변수간의 상관관계가 양이 될 수 있다. $A_m(N)$ 모형은 이러한 한계점 이외에도 (식 2-42)를 통해 알 수 있듯이 상태변수의 위험에 대한 시장가격(λ_t)이 모든 상태변수에 영향을 받는 것이 아니라 변동성을 유발하는 상태변수에만 영향을 받는다는 한계점을 가지고 있다. 그리고 이러한 위험의 시장가격 설정은 채권의 순간기대초과수익률(instantaneous expected excess return)의 부호도 고정시키게 되어 기대초과수익률의 부호가 시간에 따라서 변하는 현실을 반영하기 어렵다.

Duffee(2002)는 DS의 $A_m(N)$ 모형의 한계점을 극복하기 위하여 위험의 시장가격을 다음과 같이 제안하였다.

$$\lambda_t = \sqrt{S_t} \lambda_1 + \sqrt{S_t^-} \lambda_2 X_t \quad (2-47)$$

여기에서 λ_1 은 $(N \times 1)$ 벡터이며 λ_2 는 $(N \times N)$ 행렬이다. 그리고 $\sqrt{S_t^-}$ 는

다음과 같은 대각원소를 가지는 대각행렬이다.

$$\left\{ \sqrt{S_t^-} \right\}_{ii} = \begin{cases} (\alpha_i + \beta_i' X_t)^{-1/2} & , \text{ if } \inf(\alpha_i + \beta_i' X_t) > 0 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2-48)$$

λ_t 가 식 (2-45)와 같은 경우 P 측도와 Q 측도 하에서 상태변수의 확률과정의 추세향과 조건부공분산행렬 뿐만 아니라 SDF의 조건부공분산행렬 또한 상태변수에 선형함수가 되는 특징이 있다. 그러나 λ_t 가 식 (2-47)과 같은 경우 P 측도와 Q 측도 하에서 상태변수의 확률과정의 추세향과 조건부공분산행렬이 상태변수의 선형함수라는 특성은 유지되지만 SDF의 조건부 공분산행렬이 상태변수의 선형함수라는 특성은 유지되지 않는다. 이러한 차이점으로 인해 Duffee(2002)는 DS의 모형을 ‘completely affine’ 모형이라 하였고 식 (2-47)의 위험의 시장가격 λ_t 로 얻어지는 모형을 ‘essentially affine’ 모형이라 하였다. ‘Essentially affine’ 모형에서는 상태변수의 위험의 시장가격이 변동성 요인뿐만 아니라 나머지 모든 요인들에 의해 영향을 받게 되므로 순간기대초과수익률의 부호가 시간에 따라 변할 수 있다. 또한 식 (2-45)에 의해 부과되었던 Q 측도와 P 측도 하의 상태변수 확률과정에 대한 강한 연계관계(link)가 완화되어 동일시점에 관측되는 이자율기간구조를 설명할 뿐만 아니라 관측된 채권수익률의 시계열적 특성을 포착하여 예측력을 제고시킬 수 있다는 장점이 있다. 왜냐하면 이자율기간구조의 횡단면적 특성은 Q 측도 하의 상태변수의 확률과정에 주로 영향을 받고 시계열적 특성은 P 측도 하의 상태변수의 확률과정에 영향을 받기 때문이다.

Duarte(2004)는 DS의 모형을 더욱 일반화하는 위험의 시장가격을 다음과 같이 제안하였다.

$$\lambda_t = \Sigma^{-1} \lambda_0 + \sqrt{S_t} \lambda_1 + \sqrt{S_t^-} \lambda_2 X_t \quad (2-49)$$

여기에서 λ_0 는 $(N \times 1)$ 벡터이며, 나머지는 식 (2-47)과 식 (2-48)에서와 동일하다. 식 (2-49)와 같이 λ_t 를 설정하면 Duffee(2002)의 ‘essentially affine’ 모형에서와 같이 모든 상태변수들이 위험의 시장가격에 영향을 주며, 순간기대초과수익률의 부호가 시간가변적일 뿐만 아니라 P 측도 하의 상태변수의 추세항이 상태변수의 비선형함수가 되어 Q 측도와 P 측도 하의 상태변수의 확률과정 사이에 존재하는 강한 연계관계(link)를 더욱 완화시킬 수 있다. 그리고 이경우 P 측도 하의 상태변수의 추세항은 $\sqrt{S_t}$ 를 포함하므로 이 모형을 SASR-ATSM(semi-affine square root ATSM)이라고 한다.

Cheridito et al.(2007)은 P 측도와 Q 측도의 연계관계를 완화시켜 이자율 기간구조의 시계열적 특성에 대한 적합도를 개선시킬 수 있는 ‘extended affine’ 모형을 제안하였다. DS(2000), Duffee(2002), Duarte(2004)에서는 위험의 시장가격을 설정하여 P 측도 하의 상태변수의 확률과정을 유도하였다. 그러나 Cheridito et al.(2007)은 관점을 달리하여 P 측도와 Q 측도 하의 상태변수의 확률과정을 먼저 설정하고 다음과 같이 위험의 시장가격을 도출하였다.

$$\lambda_t = \sigma(X_t)^{-1} (\mu^P(X_t) - \mu^Q(X_t)) \quad (2-50)$$

여기서 $\sigma(X_t) = \Sigma \sqrt{S_t}$, $\mu^P(X_t) = K\Theta - KX_t$, $\mu^Q(X_t) = K^Q\Theta^Q - K^QX_t$ 이다. 이를 제외한 다른 부분은 DS의 $A_m(N)$ 모형과 동일하다. 이러한 λ_t 에서 P 측도와 Q 측도 하의 확률과정의 추세항과 조건부공분산행렬이 상태변수의 선형함수이므로 DS의 허용조건과 유사하게 확률과정의 조건부공분산행렬이 양반정부호행렬(positive semi-definite matrix)이라는 조건(boundary nonattainment condition)이 충족되어야 함을 전제로 하고 있다. Cheridito et al.(2007)은 실증분석을 통하여 ‘extended affine’모형이

이자율기간구조의 횡단면적 적합성보다는 시계열적 적합성을 개선시킬 수 있는 모형임을 보여주었다.

Duffee(2002), Duarte(2004) 그리고 Cheridito et al.(2007) 등은 Q 측도와 P 측도 하의 상태변수 확률과정 사이에 강한 연계를 관계를 완화시킬 수 있는 위험의 시장가격을 제시하였다. 이처럼 위험의 시장가격을 다양하게 정의하여 ATSM의 현실 적합성 및 설명력을 높이기 위한 연구가 지속적으로 이루어져 왔다. 그러나 이러한 노력의 결과 1차적률의 적합도만 개선될 뿐 조건부이차적률에 포함되는 수준효과는 여전히 제공근으로 고정되어 있어 2차적률의 적합도는 변함이 없다.

2. 지수이차모형

ATSM은 확률변동성을 설명하기 위한 허용조건(admissible condition)이 충족될 경우 상태변수들간에 양의 상관관계만 허용되는 제약이 가해지므로 이자율기간구조의 2차이상 적률을 충분히 설명하는데 한계가 있다. 지수이차모형(exponential quadratic gaussian term structure model, 이하 QTSM)은 ATSM이 가지는 한계를 극복하기 위한 것으로, ATSM에서 확률변동성 생성과 상태변수들 간의 음의 상관관계 허용 사이에 존재하는 상충문제(trade-off)를 해결할 수 있다. 또한, QTSM에서는 이자율이 상태변수의 이차함수이므로 ATSM이 설명할 수 없는 채권수익률의 조건부 1차 및 2차적률에 비대칭성과 비선형성이 존재하는 경우 이를 반영할 수 있으며, 모든 상태변수가 이자율의 조건부확률변동성에 영향을 줄 수 있다. 여기서는 Ahn et al.(2002, 이하 ADG) 모형을 중심으로 QTSM을 살펴보기로 한다.

N 요인 QTSM에서 단기이자율과 미관측상태변수는 다음과 같은 이차식의 관계를 가진다.

$$r_t = \alpha + \beta' X_t + X_t' \Psi X_t \quad (2-51)$$

여기에서 α 는 스칼라, β 는 $(N \times 1)$ 벡터 그리고 Ψ 는 $(N \times N)$ 행렬이다. 식 (2-51)에서 단기이자율이 음의 값을 가지지 않도록 하기 위하여 $\alpha - \frac{1}{4} \beta' \Psi \beta \geq 0$, Ψ 가 양반정부호행렬이라는 제약이 필요하다. N 차원 상태변수는 다음과 같이 가우시언 선형과정을 따른다.

$$dX_t = (\mu + \xi X_t) dt + \Sigma dW_t \quad (2-52)$$

여기에서 μ 는 $(N \times 1)$ 벡터, ξ 와 Σ 는 $(N \times N)$ 행렬이며, W_t 는 P 측도 하에서 정의된 서로 독립인 N 차원 표준위너과정을 나타낸다. 또한 상태변수의 안정성을 위해서 ξ 는 대각화가 가능하며(diagonalizable), 복소수를 허용하는 고유치의 실수부분이 음이라는 제약이 필요하다.

QTSM에서 위험의 시장가격 λ_t 는 다음과 같이 제시된다.

$$\lambda_t = \eta_0 + \eta_1 X_t = \Sigma^{-1} (\delta_0 + \delta_1 X_t) \quad (2-53)$$

여기에서 η_0 와 δ_0 는 $(N \times 1)$ 벡터, η_1 과 δ_1 은 $(N \times N)$ 행렬이다. 식 (2-53)을 보면 DS의 $A_m(N)$ 모형에서와 달리 모든 상태변수가 위험의 시장가격에 영향을 미친다. 식 (2-53)의 λ_t 로 Girsanov 정리를 적용하여 Q 측도 하의 상태변수의 확률과정을 얻을 수 있다.

$$dX_t = [(\mu - \delta_0) + (\xi - \delta_1) X_t] dt + \Sigma dW_t^Q \quad (2-54)$$

여기에서 W_t^Q 는 Q 측도 하의 서로 독립인 N 차원 표준위너과정이다.

식 (2-51), 식 (2-52) 그리고 식 (2-54)를 식 (2-7')의 채권가격결정을 위한 기초편미분방정식에 대입하면 만기시점이 $T > t$ 인 무이표채의 t 시점에서가격 $P(t, T)$ (만기수익률 $Y(t, T)$)와 만기수익률 $Y(t, T)$ 는 각

각 지수이차함수와 이차함수로 결정된다.

$$P(t, T) = \exp(A(\tau) + B(\tau)' X_t + X_t' C(\tau) X_t), \quad \tau = T-t \quad (2-55)$$

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} (A(\tau) + B(\tau)' X_t + X_t' C(\tau) X_t)$$

여기에서 $A(\tau)$ 는 스칼라, $B(\tau)$ 는 $(N \times 1)$ 벡터, $C(\tau)$ 는 $(N \times N)$ 행렬이다. 이들은 다음과 같은 상미분방정식체계를 충족한다.

$$\begin{cases} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = 2C(\tau)\Sigma\Sigma'C(\tau) + (C(\tau)(\xi - \delta_1) + (\xi - \delta_1)'C(\tau)) - \Psi \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} = 2C(\tau)\Sigma\Sigma'B(\tau) + (\xi - \delta_1)'B(\tau) + 2C(\tau)(\mu - \delta_0) - \beta \\ \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \text{tr}(\Sigma\Sigma'C(\tau)) + \frac{1}{2}B(\tau)'\Sigma\Sigma'B(\tau) + B(\tau)'(\mu - \delta_0) - \alpha \end{cases} \quad (2-56)$$

$P(T, T) = 1$ 의 경계조건으로부터 얻어지는 $A(0) = 0$, $B(0) = 0_{(N \times 1)}$, $C(0) = 0_{(N \times N)}$ 의 초기조건을 이용하여 식 (2-56)의 해를 수치적으로 구할 수 있다.

DS의 ATSM에서와 유사하게 ADG도 QTSM의 식별문제를 해결하기 위한 표준형태를 제시하고 있다. 상태변수가 미관측변수인 경우 μ 와 β 를 동시에 식별할 수 없으므로 위의 표준형태 QTSM에 대한 정의에서 $\beta = 0_{N \times 1}$ 은 파라미터 μ 를 식별하기 위한 제약이 된다. 또한 이 제약은 Ψ 가 양반정부호행렬이라는 모형설정에서 단기이자율이 양이 되도록 하는 역할을 한다. 만일 $\mu = 0_{N \times 1}$ 의 제약이 부과되면 β 를 식별할 수 있다. 이와 유사하게 파라미터 ξ 가 대각행렬로, Σ 를 하삼각행렬로 설정하는 것 또한 식별제약이 될 수 있다. 이러한 제약은 ATSM에서와 같이 상태변수가 미관측변수이므로 단기이자율의 비음조건과 식별조건을 충족하면서 채권 가격 $P(t, T)$ 를 변화시키지 않는 불변변환(invariant transformations)이

존재하기 때문이다¹²⁾.

정의[Ahn et al. (2002))] : 표준형태 QTSM (canonical form)

표준형태 QTSM은 식 (2-51)에서 식 (2-53)까지 포함된 파라미터들 $\{\alpha, \beta, \Psi, \mu, \xi, \Sigma, \delta_0, \delta_1\}$ 이 다음과 같은 설정(specification)과 제약조건을 충족하는 모형이다.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & \Psi_{12} & \cdots & \Psi_{1N} \\ \Psi_{12} & 1 & \cdots & \Psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{1N} & \Psi_{2N} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

즉, Ψ 는 1을 대각원소로 가지는 대칭행렬이다. 그리고 ξ 와 δ_1 은 하삼각행렬이며 Σ 는 대각행렬이 된다.

$$\mu \geq 0, \alpha > 0, \beta = 0_{N \times 1}$$

ATSM에서는 이자율기간구조의 확률변동성과 단기이자율이 항상 양의 값을 가지도록 하기 위해서 상태변수들 사이의 음의 상관관계가 허용되지 않는다. 그러나 QTSM에서는 단기이자율과 이자율기간구조가 가우시언 선형과정의 이차형식이므로 확률변동성과 단기이자율이 양의 값을 가지도록 하기 위하여 상태변수들간의 상관관계에 특별한 제약이 필요하지 않다. 그러므로 QTSM은 ATSM에서 확률변동성과 상태변수들간의 음의 상관관계 사이에 존재하는 상충문제(trade-off)를 해결하는 모형으로 볼 수 있다. 또한, QTSM은 상태변수에 대한 이차형식이므로 ATSM이 포착할 수 없는 비선형성이 존재하는 경우 이를 포착할 수 있는 모형이다.

12) QTSM의 파라미터 식별을 위한 식별조건과 불변변환에 대한 보다 자세한 논의는 Ahn et al.(2002)의 부록을 참조할 수 있다.

3. 비선형확률변동성모형

ATSM과 QTSM이외에 파생상품가격결정을 위한 단기이자율 모형으로 다요인 비선형확률변동성모형(non-affine stochastic volatility model)이 있다. 이러한 모형들은 단기이자율의 확률변동성과 도약(jump) 또는 국면전환(regime switching)의 특성을 설명하고자 하는데 목적이 있으므로 대부분의 경우 해석적인 채권가격이나 파생상품가격을 얻을 수 없다. Andersen and Lund(1997, 1998, 이하 AL), Andersen et al.(2004)는 단기이자율 r_t , 단기이자율의 확률변동성 또는 조건부분산인 V_t , 그리고 시변평균(time-varying mean) θ_t 를 상태변수로 하는 3요인 모형에 대한 실증분석을 제시한 바 있다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa (\theta_t - r_t) dt + \sqrt{V_t} r_t^\gamma dW_{r,t} \\ d\log V_t = \mu (\bar{v} - \log V_t) dt + \eta dW_{v,t} \\ d\theta_t = \nu (\bar{\theta} - \theta_t) dt + \zeta \sqrt{\theta_t} dW_{\theta,t} \end{cases} \quad (2-57)$$

여기에서 \bar{v} 는 $\log V_t$ 의 평균을, $\bar{\theta}$ 는 단기이자율의 시변평균의 장기평균을 나타낸다. $\{W_{vt}, W_{\theta t}, W_{rt}\}$ 는 서로 독립인 표준위너과정을 나타낸다. 식 (2-57)의 3요인 모형은 단기이자율을 제외한 시변평균 θ_t , 확률변동성 V_t 를 미관측상태변수로 가지는 모형이다. 식 (2-57)에서 시변평균 θ_t 가 CIR 과정을 따르므로 시변평균이 항상 양의 값을 가지도록 설정되어 있다. 또한 이자율의 변동성향이 시변확률변동성 V_t 뿐만 아니라 이자율 수준 r_t 에 의존한다. 이는 일반적으로 시장에서 관측되는 이자율변화의 조건부변동성이 이자율 수준 r_t 에 의존하는 특성을 반영한 것이다. 식 (2-57)에서는 이자율의 전형적인 특성들이 잘 반영될 수 있도록 모형이 설정되어 있지만 채권가격에 관한 한 ATSM 및 QTSM에서와는 달리 해석해가 존재하지 않아 수치적인 방법에 의존할 수밖에 없다.

식 (2-57)과 유사한 모형으로는 DS의 분류기준을 따를 때 $A_1(3)$ 모형에 해당하는 Chen(1996)모형이 있다. Chen(1996)모형은 다음과 같다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa (\theta_t - r_t) + \sqrt{V_t} dW_{3t} \\ dV_t = \mu (\bar{V} - V_t) dt + \eta \sqrt{V_t} dW_{1t} \\ d\theta_t = \nu (\bar{\theta} - \theta_t) dt + \zeta \sqrt{\theta_t} dW_{2t} \end{cases} \quad (2-58)$$

여기에서, \bar{V} 는 조건부분산(변동성) V_t 의 평균, θ_t 는 단기이자율의 시변 평균, $\bar{\theta}$ 는 θ_t 의 평균을 나타내며 $\{W_{1t}, W_{2t}, W_{3t}\}$ 는 서로 독립인 표준 위너과정이다.

식 (2-58)은 식 (2-27)의 Gaussian Central tendency 모형과 식 (2-32)의 Fong-Vasicek모형을 합성한 모형으로 볼 수 있다. 식 (2-57)의 AL 모형은 단기이자율의 시변평균과 (로그)확률변동성을 상태변수로 설정한 것이 식 (2-58)의 Chen 모형과 유사하지만, 단기이자율의 변동성에 단기이자율 수준이 포함되어 있다는 것은 CKLS 모형과 유사하다. 하지만 상태변수가 확률변동성의 비선형함수인 비선형 모형으로 ATSM이나 QTSM과 달리 해석적인 채권가격을 구할 수 없고, 수치적인 방법으로만 채권가격을 구할 수 있다는 차이점이 있다. 식 (2-57)의 연속시간모형은 리스크관리, 파생상품가격결정 등의 목적으로 확률변동성을 설명하는데 주로 이용되고 있다.

제 4 절 모형별 확률변동성의 특징

앞서 살펴본 연속시간 균형 이자율 기간구조모형들은 이론적인 무차익 거래의 제약을 충족할 뿐만 아니라 이자율기간구조에서 관측되는 전형적인 특성들을 설명할 수 있도록 설정되어 있다. 확률변동성은 이자율기간구조의 특성 중 하나로 ATSM은 확률변동성을 포착하기 위하여 CIR 과

정을 따르는 상태변수를 이용하고 있으며, QTSM은 이차형식이라는 모형의 특성을 이용하고 있다. 상태변수의 2차 적률로 설명되는 각 모형별 확률변동성의 차이는 리스크 관리, 파생상품 가격결정 등의 이자율 기간 구조모형을 활용하는데 있어 중요한 의미를 가지므로 본절에서는 대표적인 모형의 확률변동성 특징을 수준효과를 중심으로 살펴보기로 한다. 여기서 수준효과는 시변조건부변동성의 이자율수준 의존성을 뜻한다.

ATSM, QTSM, ISRM 등은 공통적으로 채권수익률의 조건부확률변동성이 상태변수에 의존하며, 수준효과는 사전적으로 크기가 고정된다는 공통점을 가진다. 그러나 상태변수의 함수로 설명되는 수준효과는 서로 다르게 설정되어 있다. 상태변수의 1차 및 2차적률은 상태변수 확률과정의 추세항과 변동성항 그리고 상태변수의 함수인 단기이자율을 통해 나타나는데, ATSM, QTSM, ISRM은 1차 및 2차적률의 설정에서 뚜렷한 차이점을 가지고 있다. ATSM은 식 (2-40)과 같이 단기이자율이 상태변수의 선형함수이므로 1차 및 2차적률은 식 (2-43)의 P 측도 하에 상태변수 1차 및 2차적률에 의해 결정된다. 식 (2-43)에서 추세항이 상태변수의 선형함수이므로 평균회귀성향이 상수로 일정함을 알 수 있다. 그리고 변동성항은 상태변수의 제곱근으로, 변동성항에 포함되는 상태변수들만이 이자율의 확률변동성에 영향을 줄 수 있는 구조를 가지고 있다. ATSM으로부터 도출되는 이자율의 확률과정을 통해서 이를 확인할 수 있다.

$$dr_t = \delta_X' [K(\Theta - X_t)] dt + \delta_X' \Sigma \sqrt{S(X_t)} dW_t \quad (2-59)$$

이와 달리 QTSM에서는 식 (2-51)과 식 (2-52)와 같이 단기이자율이 상태변수의 이차함수이고 상태변수의 확률과정이 가우시언 선형과정이므로 무이표채수익률의 조건부일차적률은 비선형성과 함께 비대칭적 시변평균 회귀속도를 가진다. 또한 QTSM이 설명하는 이자율 확률과정의 조건부 확률변동성의 특징은 다음과 같이 QTSM으로부터 도출되는 단기이자율의 확률과정을 통해서 확인할 수 있다.

$$dr_t = \left[tr(\Psi \Sigma^2) + (\beta' + 2 X_t' \Psi) (\mu + \xi X_t) \right] dt + (\beta' + 2 X_t' \Psi) \Sigma dW_t \quad (2-60)$$

식 (2-60)과 같이 QTSM에서 단기이자율의 조건부확률변동성은 상태변수의 선형함수로 얻어지는데 이는 단기이자율의 조건부변동성항에 포함된 수준효과가 이자율수준 자체에 의존하는 것으로 해석할 수 있다¹³⁾. 식 (2-26)의 ISRM은 추세항이 단기이자율의 이차함수로서 QTSM과 같이 단기이자율과정의 평균회귀속도가 상수가 아니라 $2\kappa r_t$ 로, 평균회귀속도가 이자율이 높을수록 빠르고 낮을수록 느린 비대칭성을 반영한다. 그리고 변동성항이 단기이자율 수준의 제곱근이 아니라 $r_t^{3/2}$ 으로 설정된 것이 특징이다. 비선형 확률변동성모형인 AL 모형은 변동성항에 r_t^γ 를 포함하여 수준효과를 파라미터로 설정하고 있다.

Ahn et al.(2003)은 1952년 1월부터 1999년 12월까지의 기간동안 6개월, 3년, 10년 만기 미국재무부 무이표채수익률 자료를 이용하여 ATSM

13) ATSM과 QTSM은 상태변수가 미관측변수로 설정되므로 이들 모형에서 조건부변동성은 상태변수의 선형결합 또는 이차결합을 통해서 간접적으로 포착되는 특징이 있다. 따라서 일반적으로 조건부변동성이 관측된 이자율 수준에 의존하는 현상만을 수준효과로 한정하는 경우, 미관측상태변수를 포함하는 ATSM, QTSM에서 이를 명시적으로 확인하는 것이 어렵다. 그러나 이자율이 무차익거래의 제약하에 상태변수의 선형결합 또는 이차결합으로 설정되므로 이자율의 조건부변동성(또는 이에 포함되는 수준효과)을 상태변수의 함수로 해석하는 것이 가능하다. 이에 대한 논거는 다음과 같다. Dai and Singleton(2000)에서 제시된 ATSM에서는 모든 AY모형(affine in state model)은 단기금리를 상태변수 중의 하나로 포함하는 Ar모형(affine in short rate model)으로 변환하는 것이 가능하다.(부록 E. 참조) 그리고 모형설정에서 단기이자율은 상태변수의 선형결합이거나 단일요인 모형에서는 상태변수자체로 볼 수 있다. Cheng and Scaillet(2007)은 QTSM이 상태변수의 상태공간을 확장한 제약하의 ATSM으로 볼 수 있음을 보였다. 즉 N 요인 QTSM은 $N+0.5N(N+1)$ 요인 ATSM으로 볼 수 있다. 따라서 앞서 언급된 ATSM의 AY모형을 Ar모형으로 변환가능하다는 논리를 동일하게 적용할 수 있다. 또한 Collin-Dufresne et al.(2008)은 모든 ATSM을 단기이자율과 그 추세항, 추세항의 추세항들과 확률변동성(USV, unspanned stochastic volatility)으로 상태변수가 구성되는 모형으로 변환할 수 있음을 보였다(Maximal affine ATSM 또는 USV 이자율 기간구조모형).

$(A_m(n))$, $QTSM(Q(h))$, $ISRM(I(k))$ 을 합성한 모형(hybrid dynamic term structure model, 이하 HDTSM)에 대한 EMM추정을 통해 모형의 적합성을 비교하였다. Ahn et al.(2003)은 다양한 3요인 합성모형에 대한 적합성 비교를 통하여 조건부정규분포를 따르는 보조모형을 가정하는 경우에 조건부확률변동성의 상태변수에 대한 의존정도가 가장 큰 $A_0(0)Q(2)I(1)$ 모형이 적합성 측면에서 가장 우수한 성과를 보이는 반면, 조건부정규분포가 아닌 보조모형을 허용하는 경우에 $A_0(0)Q(3)I(0)$ 모형의 적합성이 더 우수한 함을 보였다. 그러나 Ahn et al.(2003)은 어떤 HDTSM도 이자율기간구조를 설명하기에 충분하지 않다는 결과도 함께 제시하면서 모형이 현실의 기간구조를 충분히 설명하기 위해서는 조건부변동성의 상태변수에 대한 의존성과 상태변수들의 상관관계 측면에서 유연한 모형설정이 필요하다고 주장하였다. 또한 Jagannathan et al.(2003)은 LIBOR와 스왑이자율을 이용하여 $A_3(3)$ 모형을 추정하고 이를 이용한 캡스(caps)와 스왑선(swaption) 가격결정을 통해 모형의 적합성을 평가하였다. Jagannathan et al.(2003)은 가격결정오류가 $A_3(3)$ 모형이 확률변동성을 충분히 설명하지 못하는 것에 기인한다고 주장하였다. 확률변동성 측면에서의 ATSM 한계점은 Bikbov and Chernov(2011)에서도 지적되었다. 이들은 유로달러 선물을 이용한 3요인 ATSM 추정을 통해 ATSM이 확률변동성을 설명하기에 충분하지 않다는 것을 보이고, 이를 보완하는 방법으로 유로달러 선물옵션을 포함하는 방안을 제시하였다. 기존의 모형에 대한 실증연구와 이를 바탕으로 한 가격결정분석에서 ATSM이 확률변동성의 특성을 반영하기에 충분하지 않을 수 있다는 것이 지적되어 왔다. 이에 본 논문에서는 수준효과를 포함하는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 설정하고 추론한다. 그리고 이를 통해 기존 이자율 기간구조모형이 확률변동성 측면에서 충분한가를 살펴본다.

제 3 장 이자율 기간구조모형 추정방법

제 2장에서 살펴본 모든 연속시간 이자율 기간구조모형은 미관측상태변수를 가지는 다음과 같은 일반적인 연속시간 상태공간모형(state space model)으로 표현될 수 있다.

$$\begin{cases} y_t = Z(X_t; \Theta) + \epsilon_t \\ dX_t = \mu(X_t; \Theta) dt + \sigma(X_t; \Theta) dW_t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(y_t | X_t; \Theta) \\ p(X_s, s | X_t, t; \Theta), s > t \end{cases} \quad (3-1)$$

여기에서 y_t 는 $(N \times 1)$ 의 서로 다른 만기의 채권수익률벡터, Θ 는 모형의 파라미터, ϵ_t 는 $(N \times 1)$ 의 오차항벡터, X_t 는 $(n \times 1)$ 의 상태변수벡터, W_t 는 서로 독립인 표준위너과정을 나타낸다. 그리고 $p(y_t | X_t; \Theta)$ 는 X_t 가 주어졌을 때 y_t 의 조건부확률밀도함수를, $p(X_s, s | X_t, t; \Theta)$ 는 SDE로 설정된 상태방정식의 전이확률밀도함수(transition probability density function)를 나타낸다. 이산시간 상태공간 모형이라면 SDE로 설정된 t 시점의 상태변수 X_t 의 조건부확률밀도함수 $p(X_s, s | X_t, t; \Theta)$ 는 바로 직전기 $t-1$ 시점의 상태변수에 의존하는 1계 마르코프 성질(1st order markov property)을 가지므로 간단히 $p(X_t | X_{t-1}; \Theta)$ 로 나타낼 수 있다. 식 (3-1)의 상태공간 모형에서 첫 번째 방정식은 관측방정식 (observation equation) 또는 측정방정식 (measurement equation)이며, 두 번째 방정식은 상태방정식 (state equation) 또는 전이방정식 (transition equation)이라고 한다. 이자율 기간구조모형에서 관측방정식의 오차항 ϵ_t 는 관측오류(measurement error), 가격결정오류(pricing error) 등으로 해석할 수 있으므로 일반적으로 $\epsilon_t \sim IN(0, H_t(\Theta))$ 와 같이 설정된다. 여기에서 $IN(0, H_t(\Theta))$ 는 평균이 0, 분산이 $H_t(\Theta)$ 인 시간에 걸쳐 독립적인 다변량정규분포(multivariate normal distribution)를 나타낸다. 그러므로 관측방정식에서 $Z(X_t; \Theta)$ 는

파라미터 θ 와 상태변수 X_t 가 주어졌을 때 이론적인 채권수익률이 된다. 함수 $Z(X_t; \theta)$ 의 구체적인 형태는 분석하고자하는 채권의 만기수익률과 이자율 기간구조모형에 의해 선형 또는 비선형함수로 설정된다¹⁴⁾. 앞서 살펴본 무이표채수익률에 대한 ATSM과 QTSM의 구체적인 관측방정식은 각각 다음과 같다.

▪ ATSM 관측방정식

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{A(\tau_1)}{\tau_1} \\ \vdots \\ -\frac{A(\tau_N)}{\tau_N} \end{bmatrix}}_{a(\tau)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{B(\tau_1)'}{\tau_1} \\ \vdots \\ -\frac{B(\tau_N)'}{\tau_N} \end{bmatrix}}_{b(\tau)} X_t + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_t(\tau_1) \\ \vdots \\ \epsilon_t(\tau_N) \end{bmatrix}}_{\epsilon_t} \quad (3-2)$$

▪ QTSM 관측방정식

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{A(\tau_1)}{\tau_1} \\ \vdots \\ -\frac{A(\tau_N)}{\tau_N} \end{bmatrix}}_{a(\tau)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{B(\tau_1)'}{\tau_1} \\ \vdots \\ -\frac{B(\tau_N)'}{\tau_N} \end{bmatrix}}_{b(\tau)} X_t + X_t' \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{C(\tau_1)}{\tau_1} \\ \vdots \\ -\frac{C(\tau_N)}{\tau_N} \end{bmatrix}}_{c(\tau)} X_t + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_t(\tau_1) \\ \vdots \\ \epsilon_t(\tau_N) \end{bmatrix}}_{\epsilon_t} \quad (3-3)$$

여기에서 $\{y_t(\tau_i) = y(t, T_i), \tau_i = T_i - t, i = 1, \dots, N\}$ 이며, 식 (3-2)와 식

14) 지금까지 본 논문에서는 부도위험이 없는 무이표채(default-free zero-coupon bond)의 만기수익률을 주로 다루었지만, 이표채권(coupon bond)의 만기수익률의 경우에는 만기수익률이 상태변수의 비선형함수가 된다.

(3-3)의 $\{A(\tau_i), B(\tau_i), i = 1, \dots, N\}$ 와 $\{A(\tau_i), B(\tau_i), C(\tau_i), i = 1, \dots, N\}$ 는 각각 식 (2-43)과 식 (2-55)와 동일하다.

일반적인 필터링 절차(General filtering procedure)

- 1기간 예측확률밀도함수

(one-step ahead prediction probability density function)

$$\begin{aligned}
 p(X_t | y_{1:t-1}; \Theta) &= \int p(X_t, X_{t-1} | y_{1:t-1}; \Theta) dX_{t-1} \\
 &= \int p(X_t | X_{t-1}, y_{1:t-1}; \Theta) p(X_{t-1} | y_{1:t-1}; \Theta) dX_{t-1} \\
 &= \int p(X_t | X_{t-1}; \Theta) p(X_{t-1} | y_{1:t-1}; \Theta) dX_{t-1}
 \end{aligned} \tag{3-4}$$

여기에서 $y_{1:t-1} = \{y_1, y_2, \dots, y_{t-1}\}$ 이다.

- 필터 확률밀도함수(filtered probability density function)

$$\begin{aligned}
 p(X_t | y_{1:t}; \Theta) &= p(X_t | y_t, y_{1:t-1}; \Theta) \\
 &= \frac{p(y_t | X_t, y_{1:t-1}; \Theta) p(X_t | y_{1:t-1}; \Theta)}{p(y_t | y_{1:t-1}; \Theta)} \\
 &= \frac{p(y_t | X_t; \Theta) p(X_t | y_{1:t-1}; \Theta)}{p(y_t | y_{1:t-1}; \Theta)}
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{여기에서, } p(y_t | y_{1:t-1}) &= \int p(y_t, X_t | y_{1:t-1}) dX_t \\
 &= \int p(y_t | X_t) p(X_t | y_{1:t-1}) dX_t \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

일반적으로 미관측상태변수를 포함하는 연속시간 상태공간모형에 대한 통계적 추론에는 미관측상태변수에 대한 필터링기법들(filtering methods)이 이용된다. 상태공간모형에 대한 필터링기법들은 모형의 파라미터가 주어진 것으로 보고 미관측상태변수에 대한 통계적 추론에 초점을 두고 있다. 이자율 기간구조모형에 대한 통계적추론을 위해 이용할 수 있는 자료가 일반적으로 이산시간에 관측되는 자료라는 사실을 감안하여 이후 상태공간모형에 대한 논의에서는 이산시간 상태공간모형을 위주로 살펴보기로 한다. 일반적인 상태공간모형에 대한 필터링을 위해서는 식 (3-1)의 관측확률밀도함수 $p(y_t | X_t; \Theta)$ 와 전이확률밀도함수 $p(X_t | X_{t-1}; \Theta)$ 와 함께 미관측상태변수의 초기확률밀도함수 $p(X_0)$ 에 대한 설정이 필요하다. 상태공간모형에 필요한 $\{p(y_t | X_t; \Theta), p(X_t | X_{t-1}; \Theta), p(X_0)\}$ 이 주어지면 미관측상태변수에 대한 최적필터링(optimal filtering)은 미관측상태변수에 대한 예측확률밀도함수(prediction probability density function)와 필터확률밀도함수(filtered probability density function)를 구하는 반복적인 절차로 구성된다.

앞의 상태공간모형에 대한 일반적인 필터링절차는 $t-1$ 시점까지의 정보를 이용하여 t 시점의 미관측상태변수에 대한 예측확률밀도함수를 구하는 과정과 t 점의 추가적인 정보 y_t 를 이용하여 구해진 예측확률밀도함수를 갱신하는 과정으로 구성됨을 알 수 있다. 필터확률밀도함수를 구하는 과정에서 식 (3-5)의 두 번째 등호와 세 번째 등호의 관계에서 X_t 가 주어지면 $y_{1:t-1}$ 의 정보는 y_t 의 분포를 결정하는데 추가적인 정보를 주지 못한다는 가정에 따른 것이다. 식 (3-4)에서 예측확률밀도함수를 얻을 수 있다면 미관측상태변수의 최적예측치(optimal predictor in mean-squared-error sense)는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$E[X_t | y_{1:t-1}; \Theta] = \int X_t p(X_t | y_{1:t-1}; \Theta) dX_t \quad (3-6)$$

마찬가지로 식 (3-5)의 필터확률밀도함수를 이용하면 다음과 같은 상태 변수에 대한 필터추정치(filtered estimate)를 얻을 수 있다.

$$E[X_t | y_{1:t}; \Theta] = \int X_t p(X_t | y_{1:t}; \Theta) dX_t \quad (3-7)$$

또한 식 (3-4)와 식 (3-5)의 필터링 알고리즘에서는 부가적으로 관측치 y_t 의 우도함수를 얻을 수 있다. 식 (3-5)의 필터확률밀도함수를 구하는 과정에서 $p(y_t | y_{1:t-1}; \Theta)$ 는 관측치 y_t 의 조건부확률밀도함수를 나타낸다. 따라서 일반적인 예측오차분해를 통해 다음과 같은 로그우도함수(log-likelihood)를 얻을 수 있고 이를 이용한 파라미터 Θ 에 대한 최우추정(maximum likelihood estimation, MLE)이 가능하다.

$$\log L(y_1, y_2, \dots, y_T) = \sum_{t=1}^T \log p(y_t | y_{1:t-1}; \Theta) \quad (3-8)$$

식 (3-1)의 이자율 기간구조모형은 미관측상태변수 뿐만 아니라 모형의 파라미터에 대한 통계적 추론도 필요하다. 식 (3-8)의 로그우도함수는 필터링과정에서 식 (3-4)와 식 (3-5)의 예측확률밀도함수와 필터확률밀도함수를 구할 수 있을 때 부가적으로 얻어질 수 있다. 예측확률밀도함수, 필터 확률밀도함수 그리고 평활 확률밀도함수들은 모두 적분을 포함하고 있는데 이산시간 이산상태(discrete time discrete state) 상태공간 모형¹⁵⁾이나 선형정규분포 상태공간모형의 경우를 제외한 대부분의 경우 이들에 포함된 적분을 해석적으로 구하는 것이 사실상 불가능하다. 이산상태 상태공간모형의 경우에는 식 (3-6)과 식 (3-7)의 적분과정이 모두 합으로 전환되므로 쉽게 계산할 수 있으며, 정규분포를 따르는 선형 상태공간모형은 칼만필터를 이용해 쉽게 계산할 수 있다.

15) 은닉마르코프 모형(Hidden Markov Model) 또는 마르코프 국면전환 모형(Markov regime-switching model) 등이 이에 해당한다.

식 (3-1)의 연속시간 이자율 기간구조모형에 대한 실증분석에서 통계적인 추론이 어려운 것은 SDE로 표현된 미관측상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 알 수 없거나 해석적인 형태로 얻는 것이 용이하지 않다는 것에서 기인한다. 또한 해석적인 이산시간 전이확률밀도함수를 얻을 수 있다고 하더라도 선형 정규분포를 제외하고는 식 (3-4)와 식 (3-5)의 예측확률밀도함수와 필터확률밀도함수, 그리고 식 (3-6)과 식 (3-7)의 미관측상태변수에 대한 예측치와 필터추정치를 구하는 과정에 포함된 적분을 계산하는 것도 용이하지 않다. 예외적으로 변동성요인을 가지지 않는 $A_0(n)$ ATSM의 경우에는 관측방정식의 오차항과 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수가 다변량정규분포를 따르는 선형정규상태공간모형(linear normal state space model)이 되므로 칼만필터를 이용한 정확한 추정(exact estimation)이 가능하다. QTSM의 경우에는 상태변수가 가우시언 선형과정으로 설정되므로 이산시간 상태방정식이 항상 정규분포를 따르는 선형방정식이 되지만, 관측방정식은 상태변수의 이차형식인 비선형방정식이 된다. 그러므로 QTSM에서는 EKF(extended Kalman filter)와 같은 비선형필터링 알고리즘의 적용이 가능하다. 그러나 이 경우에도 비선형관측방정식을 선형모형으로 근사하는 방법이 이용되므로 효율적인 추정법으로 보기는 어렵다.

이산화방법을 이용하여 이자율 기간구조모형을 이산시간 비선형비정규상태공간모형으로 설정하거나 미관측상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수에 대한 해석적인 형태를 얻을 수 있는 경우에는 다양한 필터링방법을 이용할 수 있다. Kitagawa(1987)와 Kramer and Sorenson(1988)은 수치적인 방법을 이용하여 예측, 필터 그리고 평활확률밀도함수(smoothed probability density function)를 구하는 방법을 제시하였다. 그러나 Kitagawa(1987)의 알고리즘을 이용해 적분을 계산하기 위해서는 사전적으로 계산을 위한 격자점(grid)을 결정할 수 있어야 한다. 또한 격자점을 결정할 수 있더라도 계산의 정확성을 높이기 위해 사전적으로 그 간격을 조절하는 것이 쉽지 않으며, 특히 상태공간의 차원이 증가하는 경우 계산상의

부담이 크게 증가한다. 이러한 문제점으로 인해 수치적 방법은 상태변수 X_t 의 차원이 비교적 작은 경우에 적용 가능하다. 이를 해결하는 방법으로 Kitagawa(1996)는 예측확률밀도함수와 필터확률밀도함수의 계산과 미관측상태변수에 대한 추론에 몬테카를로필터(Monte Carlo filter)와 몬테카를로스무더(Monte Carlo smoother)를 이용한 방법을 제시하였다. 이 밖에도 식 (3-1)과 같이 미관측상태변수를 포함하는 일반적인 상태공간모형의 파라미터를 추정하는 다양한 방법들이 제시되었다. Carlin et al.(1992)와 Jacquier et al.(1994), Shephard(1994), Shephard and Pitt(1997), Kim et al.(1998), Chib et al.(2002), Johannes et al.(2003) 등에서 MCMC(Markov Chain Monte Carlo)을 사용하는 베이지언 추정방법이 다양하게 제시되었다. 그리고 Danielsson and Richard(1993), Tanizaki and Mariano(1994), Danielsson(1994), Mariano and Tanizaki(1995), Durbin and Koopman(1997), Sandmann and Koopman(1998), Geweke and Tanizaki(2001) 등은 중요표본추출법(importance sampling), 기각표본추출법(rejection sampling)과 같은 시뮬레이션을 이용한 SML 추정법(simulated maximum likelihood estimation method)을 제시하였다. 또한 Duffie and Singleton(1993)은 MSM(Methods of simulated moments), Gallant and Tauchen(1996)은 EMM(Efficient Method of Moments)을 이용한 시뮬레이션기반(simulation-based) 간접추론방법(indirect inference method)을 제안하였다. 이들 추정방법들은 대부분 확률변동성모형 뿐만 아니라 이자율 기간구조모형 추정에도 이용된다. 이밖에도 EM알고리즘(expectation Maximization algorithm)과 시뮬레이션을 활용하는 MCEM알고리즘(Monte Carlo EM algorithm) 그리고 SEM알고리즘(Simulated EM algorithm) 등이 미관측상태변수가 존재하는 모형에 대한 전통적인 추정방법이다. 그러나 이들은 대부분 이산시간 상태공간모형에 대한 추정방법이므로 연속시간모형에 직접 적용하기 위해서는 모형의 이산화 또는 해석적인 형태의 이산시간 전이확률밀도함수가 필요하다.

식 (3-1)에 대하여 필터링기법을 적용할 수 있다고 하더라도 이자율

기간구조모형에 대한 통계적인 추론에는 두 가지 측면에서의 어려움이 남는다. 첫째, 식 (3-1)은 연속시간모형인데 실제 통계적 추론에 이용 가능한 자료는 이산시간에 관측된 자료이므로 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수에 대한 고려가 필요하다. 둘째, 일부의 예외적인 경우를 제외하면 SDE로 설정된 상태변수의 전이확률밀도함수를 알 수 없거나 알 수 있다고 하더라도 해석적인 형태를 얻을 수 없는 경우가 대부분이다. 따라서 식 (3-1)의 모형 추정을 위해서는 미관측상태변수 뿐만 아니라 미관측상태변수의 전이확률밀도함수가 가지는 이러한 문제를 고려할 필요가 있다. 여기서는 이자율 기간구조모형을 포함한 다양한 영역의 금융경제관련 기존연구에서 이들 문제를 회피하거나 극복하기 위하여 제시된 방법을 중심으로 식 (3-1)의 일반적인 이자율 기간구조모형에 대한 추정 방법들을 살펴보기로 한다¹⁶⁾.

제 1 절 일반화된 적률법

Hansen(1982)의 일반화된 적률법(Generalized Method Moments, 이하 GMM)은 MLE와 함께 일반적인 모형추정방법으로 가장 널리 이용되는 추정 방법이다. 특히 GMM은 모형의 추정에 이용되는 변수의 안정성(stationarity)과 에르고딕성(ergodicity)의 가정이 충족된다면 해석적인 우도함수를 구할 수 없거나 우도함수를 구하는 것이 쉽지 않은 경우에도 적용할 수 있는 추정 방법이다. 그러므로 식 (3-1)의 이자율 기간구조모형과 같이 우도함수를 구하는 것이 용이하지 않은 연속시간모형에 대한 추정방법으로 자주 이용되

16) Duffie et al.(2000)은 해석적인 이산시간 전이확률밀도함수를 구할 수 없는 선형확산과정(affine diffusion process)의 해석적인 특성함수를 얻는 방법을 제시하였는데 이로부터 GMM추정을 위한 적률조건을 얻을 수 있다. Singleton(2001)은 선형확산과정의 이산시간 전이확률밀도함수의 해석적인 조건부특성함수에 대한 역푸리에변환(inverse Fourier transform)을 이용하여 선형확산과정의 우도함수를 근사하는 추정방법을 제시하였다. 이러한 방법과 관련한 보다 자세한 논의는 Duffie et al.(2000)과 Singleton(2001)을 참조할 수 있다.

는 방법이다. 또한 GMM은 모형으로부터 도출되는 이론적인 적률이나 가설을 적률조건으로 이용할 수 있는 추정법이므로 파라미터에 대한 추정과 함께 모형이 의미하는 이론적인 가설검정이 용이한 추정법으로 볼 수 있다. 이제 이러한 특징이 있는 GMM에 대해서 간략하게 살펴보기로 한다.

추정하고자 하는 모형의 l 차원 파라미터를 ψ , GMM추정을 위한 ($k \geq l$) 차원의 적률조건(또는 직교조건)을 $f_t(\psi)$ 라 하면, 이 적률이 참이라는 귀무가설 하에 $E[f_t(\psi)] = 0$ 이 성립한다. 모적률조건(population moment condition) $E[f_t(\psi)]$ 에 해당하는 표본적률조건(sample moment condition)은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$g_T(\psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\psi)$$

파라미터 ψ 에 대한 GMM추정치는 다음과 같은 목적함수에 대한 최소화를 통해서 얻을 수 있다.

$$\hat{\psi}_{GMM} = \operatorname{argmin}_{\psi} J_T(\psi) = \operatorname{argmin}_{\theta} g_T(\psi)' W_T(\psi) g_T(\psi) \quad (3-7)$$

여기에서 $W_T(\psi)$ 는 양정부호이고 대칭인 가중행렬(positive-definite symmetric weighting matrix)을 나타낸다. 식 (3-7)의 이차형식의 최적화에서 최적가중행렬을 적률조건에 대한 장기공분산행렬 $S(\psi)$ 의 역행렬로 다음과 같이 설정하면, 파라미터에 대한 GMM추정치 $\hat{\psi}_{GMM}$ 는 점근적으로 최소공분산행렬을 가지는 것으로 알려져 있다.

$$W_T(\psi) = S(\psi)^{-1} \quad (3-8)$$

Hansen(1982)에서는 장기공분산행렬 $S(\psi)$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$S(\psi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Gamma_i, \quad \Gamma_i = E[f_t(\psi) f_{t-i}(\psi)']$$

위와 같은 방법으로 구한 $S(\psi)$ 는 양정부호행렬이 아닐 수 있기 때문에 일반적으로 비모수적방법으로 이를 구하는 방법들이 주로 이용될 수 있다. 식 (3-8)의 최적가중행렬을 이용한 GMM추정치 $\hat{\psi}_{GMM}$ 는 일반적인 조건(regularity conditions)하에서 점근적으로 일치성(consistency)과 효율성(efficiency)을 가진다. $\hat{\psi}_{GMM}$ 의 점근적 분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{T}(\psi - \hat{\psi}_{GMM}) \sim^a N(0, (G_0' S_0(\psi)^{-1} G_0)^{-1}) \quad (3-9)$$

여기에서 $G_0 = E\left[\frac{\partial f_t(\psi)}{\partial \psi}\right]_{\psi = \hat{\psi}_{GMM}}$ 이다. 그리고 $\hat{\psi}_{GMM}$ 에서 평가한 최소화된 목적함수값에 관측치의 수 T 를 곱한 값은 $E[f_t(\psi)] = 0$ 의 귀무가설하에 점근적으로 자유도 $(l-k)$ 를 가지는 카이제곱분포(chi-square distribution)를 따른다.

$$T J_T(\hat{\psi}_{GMM}) \sim^a \chi^2(l-k) \quad (3-10)$$

여기에서 $\chi^2(l-k)$ 는 자유도 $(l-k)$ 를 가지는 카이제곱분포를 나타낸다. 식 (3-10)을 이용한 검정을 과다식별검정(over-identification test)라고 하는데 일반적으로 모형의 적합성을 검정하는 통계량으로 이용된다.

Brown and Dybvig(1986), Gibbons and Ramaswamy(1993), Longstaff(1989), Chan et al.(1992), Conley et al.(1997) 등의 연구에서는 단일요인 이자율 기간구조모형이나 단기이자율 모형에 대한 추정법으로 GMM추정법을 이용한다. 또한 Leippold and Wu(2002)는 QTSM에 대한 추정법으로 GMM을 이용하였다. 특히 Conley et al.(1997)에서는 Hansen and

Scheinkman(1995)에서 제시된 ‘infinitesimal generator’를 이용한 정확한 적률조건(exact moment conditions)을 이용하였다는 것이 주로 이산화한 모형에 대한 GMM추정을 한 다른 연구들과 차별화되는 특징이다¹⁷⁾. 그러나 대부분의 연구에서는 자료가 안정성을 충족한다는 가정 하에 이산 자료에 대한 통계적 적률조건과 함께 모형으로부터 도출되는 이론적 적률조건이 일반적으로 이용되고 있다. 일반적으로 1차 적률, 2차 적률 그리고 자기공분산 등의 통계적 적률조건들이 주로 이용된다. 그러나 이자율 기간구조모형 추정에 이용되는 만기수익률들은 횡단면적으로 매우 큰 상관관계를 가지며, 시계열적으로도 매우 큰 계열상관(serial correlation)을 가지는 특징이 있다. 이러한 만기수익률자료의 시계열적 불안정성에 가까운 특성과 횡단면적 종속성을 반영한 효율적인 GMM추정을 위해서는 매우 많은 수의 적률조건들이 필요하게 된다. 그러나 일반적으로 모형을 추정하는 하기 위해서 일부의 적률조건만을 이용하게 되므로 효율적인 추정을 위한 정보이용의 측면에서 정보의 손실이 있을 수 있다. 따라서 일부의 적률조건만을 이용한 이자율 기간구조모형에 대한 GMM추정은 그다지 효율적인 추정 방법으로 보기는 어렵다. 일반적으로 이자율 기간구조모형에 이용되는 자료들이 횡단면과 시계열적으로 매우 큰 종속성을 가지며, 효율적인 추정에 필요한 적률조건들의 개수에 대한 명시적인 선택기준이 존재하지 않는다는 점은 GMM추정의 효율성을 저해하는 요인으로 볼 수 있다. 그리고 일반적인 이자율 기간구조모형과 같은 동태적인 특성이 강한 모형에 대한 추정을 위한 적률조건 $E[f_t(\theta)] = 0$ 이 관측된 채권수익률만을 이용한 적률(unconditional moments)이므로 미관측상태변수의 동태적인 특성을 충분히 반영하기 어려운 점이 있다. 그러나 무엇보다도 연속시간 이자율기간모형에 대한 GMM추정을 어렵게 하는 요인은 연속시간 이자율기간모형으로부터 유도되는 이산시간 적률조건을 해석적으로 얻기 어렵다는 점이다. 대부분의 GMM을 이용한 이자

17) Infinitesimal generator를 이용한 정확한 적률조건(exact moment conditions) 생성과 관련된 보다 자세한 논의는 Conley et al.(1997)을 참조할 수 있다.

을 기간구조모형 추정이 이산시간모형이나 오일러이산화를 적용하여 이산시간모형으로 전환한 모형에 대해 이루어진 이유는 연속시간모형으로부터 유도되는 이산시간 적률조건을 해석적으로 얻기 어렵기 때문이다. Duffie and Singleton(1993)은 이러한 문제점을 해결하는 방안으로 MSM(method of simulated moment) 추정법을 제시하였다. MSM에 대한 구체적인 논의는 간접추론추정법에 대해 살펴볼 때 하기로 한다.

제 2 절 QML추정법

1. 역변환을 이용한 QML추정법

앞서 살펴본 바와 같이 일반적인 이자율 기간구조모형의 추정을 어렵게 하는 원인은 연속시간으로 표현된 미관측상태변수의 이산시간 확률분포를 알 수 없거나 그 해석적인 행태를 얻는 것이 용이하지 않다는 점이다. Chen and Scott(1993), Person and Sun(1994), Duffie and Singleton(1997), Duffee(2002), Ang and Piazzesi(2003) 등은 ATSM모형에 대한 추정에서 이러한 문제를 해결하기 위하여 관측된 채권수익률을 이용하여 미관측상태변수를 추출하고 제거하는 방법을 통해서 미관측상태변수를 포함하는 이자율 기간구조모형을 관측된 채권수익률만의 모형으로 변환하는 방법을 이용하였다. 이들의 방법을 편의상 ‘수익률 역변환방법’(yield inversion method)이라 하고 이들의 연구에서 제시된 ATSM에 대한 추정방법을 살펴보기로 한다. 논의의 편의를 위하여 일반적인 ATSM모형을 다음과 같이 다시 쓰기로 하자.

$$\begin{cases} y_t(\tau) = a(\tau) + b(\tau)X_t + \epsilon_t, & \epsilon_t \sim IN(0, H_t) \\ dX_t = K(\Theta - X_t)dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t \end{cases} \quad (3-11)$$

여기에서 $y_t(\tau)$ 는 $(N \times 1)$ 의 서로 다른 만기 $\{\tau_i = T_i - t, i = 1, \dots, N\}$ 의 무이표채수익률 벡터 X_t 는 $(n \times 1)$ 차원의 미관측상태변수벡터를, ϵ_t 는 평균이 $0_{(N \times 1)}$, 분산이 H_t 인 시간에 대해 독립인 $(N \times 1)$ 차원의 오차항 벡터를 나타낸다. 그리고 $a(\tau)$ 와 $b(\tau)$ 는 각각 식 (3-2)에서와 같이 식 (2-44) 상미분방정식의 해를 개별만기로 나누어준 후 만기 순으로 쌓아놓은 $(N \times 1)$ 벡터와 $(N \times n)$ 행렬을 나타낸다. $a(\tau)$ 와 $b(\tau)$ 는 위험의 시장가격과 관련된 파라미터들에 의존하지만 편의를 위해 이를 생략하였다. 상태변수 X_t 에 대한 SDE는 제 2장의 DK와 DS의 설정과 동일하다.

역변환을 이용하여 미관측상태변수 X_t 를 관측된 채권수익률로 대체하기 위해서는 관측된 채권수익률 $y_t(\tau)$ 가운데 X_t 의 차원에 해당하는 만큼의 채권수익률의 오차항이 0이라는 가정이 필요하다. 즉 n 개의 채권에 대한 가격결정오류나 측정오류가 없다는 가정이 필요하다. 이 가정에 따라 관측치방정식을 오차항이 0인 채권과 0이 아닌 채권에 해당하는 식으로 다음과 같이 재배열 또는 분할할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_{1t}(s_1) \\ y_{2t}(s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(s_1) \\ a_2(s_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(s_1) \\ b_2(s_2) \end{bmatrix} X_t + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_{1t}(s_1) = a_1(s_1) + b_1(s_1) X_t \\ y_{2t}(s_2) = a_2(s_2) + b_2(s_2) X_t + \epsilon_{2t} \end{cases} \quad (3-12)$$

여기에서 s_1 과 s_2 는 오차항이 0인 n 개의 채권만기와 0이 아닌 $(N-n)$ 개의 채권만기를 나타낸다. 그리고 $a_1(s_1)$ 은 $(n \times 1)$ 벡터, $a_2(s_2)$ 는 $((N-n) \times 1)$ 벡터, $b_1(s_1)$ 은 $(n \times n)$ 행렬, $b_2(s_2)$ 는 $((N-n) \times n)$ 행렬을 나타낸다. 식 (3-12)에서 $y_{1t}(s_1)$, 즉 오차항이 0인 채권수익률에 대한 식을 이용하면 미관측상태변수 X_t 를 구할 수 있다.

$$X_t = b_1(s_1)^{-1} (y_{1t} - a_1(s_1)) \quad (3-13)$$

식 (3-13)은 식 (3-11)의 ATSM에서 미관측상태변수 X_t 대신 오차항이 0인 관측된 채권수익률 $y_{1t}(s_1)$ 를 이용할 수 있다는 것을 의미하는 역변환이다. 이를 이용하면 이자율 기간구조모형의 우도함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\log L(y_1, \dots, y_T) = \sum_{t=1}^T \log f_1(y_{2t}(s_2)|y_{1t}(s_1); \psi) + \sum_{t=1}^T \log f_2(y_{1t}(s_1)|y_{1t-1}(s_1); \psi) \quad (3-14)$$

여기에서 ψ 는 식 (3-11)의 ATSM모형의 파라미터들을 나타낸다. 식 (3-14)는 이자율 기간구조모형의 로그우도함수가 두 부분으로 분할될 수 있음을 보여주고 있다. 식 (3-14)에서 첫 번째 항은 $y_{1t}(s_1)$ 이 주어졌을 때 $y_{2t}(s_2)$ 의 조건부우도함수를 나타내는데 이는 모형설정에 의해 다변량정규분포를 따른다. 두 번째 항은 식 (3-13)의 관계를 이용하여 $y_{1t}(s_1)$ 로 나타낸 상태변수 X_t 의 전이확률밀도함수를 나타낸다. 앞서 언급된 바와 같이 정규분포를 따르는 가우시언 선형과정이나 독립적인 CIR 과정을 제외하고 X_t 의 이산시간 전이확률밀도함수의 해석적인 형태를 얻는 것이 대부분 용이하지 않다. 특정 만기의 채권수익률 방정식의 오차항이 0이라고 가정하여 미관측상태변수 대신 관측된 채권수익률을 이용한다고 하더라도 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수의 해석적인 형태를 얻을 수 없다면 우도함수를 이용하여 모형을 추정하는 것은 불가능하다. 그러므로 일반적인 ATSM추정을 위해서는 $dX_t = K(\theta - X_t)dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t$ 로 설정된 상태방정식의 해석적인 이산시간 전이확률밀도함수를 구하거나 근사하는 것이 필요하다.

ATSM에 대한 역변환을 이용한 QML(quasi maximum likelihood)추정에는 상태변수 X_t 의 이산시간 평균과 분산을 구하고 이들을 평균과 분산으로 하는 정규분포를 이용하여 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 근사하는 방법이 사용된다. 상태변수의 이산시간 평균과 분산이

동일한 정규분포로 해석적인 형태를 얻기 어려운 이산시간 전이확률밀도 함수를 근사하는 방법은 이후 살펴볼 칼만필터를 이용한 QMLE에서도 이용되는 방법이다. 이러한 방법은 ATSM모형에서 상태변수의 SDE가 다음과 같이 풀이 될 수 있는 특징에 따른 것인데, 식 (3-11)의 SDE를 $X_s (s > t)$ 에 대하여 풀면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$X_s = e^{-K(s-t)} X_t + \int_t^s e^{-K(s-v)} K \Theta dv + \int_t^s e^{-K(s-v)} \Sigma \sqrt{S_v} dW_v \quad (3-15)$$

그리고 식 (3-15)에 대하여 평균과 분산을 구하는 연산을 하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$E [X_s | X_t] = (I_m - e^{-K(s-t)}) \Theta + e^{-K(s-t)} X_t \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} & Cov [X_s | X_t] \\ &= E \left[\left(\int_t^s e^{-K(s-v)} \Sigma \sqrt{S(X_v)} dW_v \right) \left(\int_t^s e^{-K(s-v)} \Sigma \sqrt{S(X_v)} dW_v \right)' | X_t \right] \\ &= E \left[\left(\int_t^s e^{-K(s-v)} \Sigma S(X_v) \Sigma' e^{-K'(s-v)} dv \right)' | X_t \right] \\ &= \left(\int_t^s e^{-K(s-v)} \Sigma E [S(X_v) | X_t] \Sigma' e^{-K'(s-v)} dv \right) \\ &= \left(\int_t^s e^{-K(s-v)} \Sigma \{ \alpha_i + \beta_i' E [X_v | X_t] \} \Sigma' e^{-K'(s-v)} dv \right) \end{aligned} \quad (3-17)$$

식 (3-16)과 식 (3-17)의 상태변수의 이산시간 평균과 분산을 구하는 일반적인 방법으로는 Fisher and Giles(1996)나, Duan and Simonato(1999)

의 방법이 일반적으로 이용된다. 이들 방법에서는 기본적으로 K 가 대각화가 가능하고 K 의 모든 고유치(eigenvalue)가 실수라고 가정하는 것에서는 동일하다. 그러나 Fisher and Giles(1996)는 후방풀이법(backward approach solution method)을 이용하고 있으며 Duan and Simonato(1999)는 전방풀이법(forward approach solution method)을 이용하고 있다는 점에서는 차이가 있다¹⁸⁾. K 에 대한 이러한 가정을 완화하여 보다 일반적이고 안정적인 방법으로 상태변수의 이산시간 평균과 분산을 구하는 방법은 Fackler(2000)가 제시하고 있다. 이렇게 구한 식 (3-16)과 식 (3-17)의 이산시간 상태변수의 분산은 다음과 같이 상태변수 X_t 에 대한 선형함수로 나타내어진다.

$$\begin{cases} E[X_s | X_t] = d(\psi) + T(\psi) X_t \\ Cov[X_s | X_t] = Q_0(\psi) + \sum_{j=1}^n Q_j(\psi) X_{jt} \end{cases} \quad (3-18)$$

여기에서 ψ 는 식 (3-11)의 상태변수 X_t 에 대한 SDE에 포함된 파라미터들을 나타내며, 파라미터의 함수인 $d(\psi)$ 는 $(n \times 1)$ 벡터, $T(\psi)$, $Q_0(\psi)$, $\{Q_j(\psi), j = 1, \dots, n\}$ 는 $(n \times n)$ 행렬이다. 이들을 구하는 방법에 대한 보다 자세한 논의는 Fisher and Giles(1996), Duan and Simonato(1999), Fackler(2000)를 참조할 수 있다.

역변환을 이용한 QMLE추정은 해석적으로 구하기 어려운 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 이산시간 평균과 분산이 동일한 정규분포

18) 상태변수의 이산시간 평균과 분산을 구하는 방법으로 이용되는 Fisher and Giles(1996)와 Duan and Simonato(1999)의 방법에서 K 의 고유치가 모두 실수라는 가정은 상태변수의 동태적인 움직임에 제약을 가할 수 있다. 모든 상태변수가 미관측일 때에는 상대적으로 그 제약이 크게 문제가 되지 않을 수 있지만 일부의 상태변수가 관측변수일 때에는 문제가 될 가능성이 있으므로 일반적으로 K 의 고유치가 복소수가 될 가능성을 허용하는 것이 필요하다. 이 때에는 Fisher and Giles(1996)와 Duan and Simonato(1999)의 방법보다는 Fackler(2000)에서 제시된 방법을 이용할 수 있다.

로 근사한다는 측면에서 효율성의 상실이 있는 추정방법이다. 또한 식 (3-13)의 역변환을 위해서는 미관측상태변수의 수만큼의 채권수익률 오차항이 0이라는 가정을 하고 있는데, 현실에서 어떤 만기의 채권수익률의 오차항이 0이라고 가정하는 것이 바람직한지 알 수 없으므로 오차항이 0인 채권수익률을 선택하는 것이 자의적일 수 있다. 즉, 모형추정을 위해 오차항이 0이라고 가정하게 되는 채권수익률을 서로 다르게 선정했을 때, 각각 얻어진 파라미터와 추정된 파라미터를 고정된 값으로 보고 식 (3-13)의 역변환을 이용해 얻은 미관측상태변수가 매우 상이할 수 있다는 문제점이 있다. Duffie and Singleton(1997)은 역변환을 이용하여 $A_2(2)$ 이자율스왑 만기수익률 기간구조 모형을 추정하였다. 그런데 이자율스왑 수익률은 다음과 같이 비선형관측방정식을 가진다.

$$y_{swap}(t, t+\tau) = \frac{1 - P(t, t+\tau)}{\sum_{j=1}^{2\tau} P(t, t+j/2)}$$

이러한 비선형 관측방정식에서도 역변환법을 이용한 최우추정이 가능하다. 다만 관측방정식이 상태변수의 비선형함수이므로 식 (3-13)과 같은 해석적인 형태의 역변환 대신 수치적인 방법으로 역변환하는 것이 필요하다.

역변환을 이용한 이자율 기간구조모형을 추정하는 대부분의 연구에서는 앞에서 살펴본 QML추정법을 적용하고 있다. 그러나 식 (3-13)과 같은 역변환을 통해서 미관측상태변수를 관측된 무이표채수익률로 전환할 수 있다면, 자료가 관측된 일반적인 연속시간확산모형 추정에 이용되는 근사최우추정법(approximate maximum likelihood)을 적용하는 것이 가능하다. 근사의 정도가 충분하다면 일반적으로 근사최우추정치는 최우추정치로 수렴한다는 것이 알려져 있다.

연속시간 확산모형에 대한 시뮬레이션을 이용한 근사최우추정법은

Pedersen(1995), Brandt and Santa-Clara(2002)에 의해 제시되었다. 시물레이션을 이용한 근사최우추정법은 연속확산과정이 마르코프성질(Markov property)을 가지므로 이산시간 전이확률밀도를 쓸 수 있다는 점에 착안한 것이다. 먼저 이자율이 관측되는 이산시점 $[t, t+1]$ 을 k 개의 작은 소구간으로 분할하고 이 분할된 소구간을 $h=1/k$ 로 하면 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} f(X_{t+1}|X_t, \psi) &= \int f(X_{t+1}|X_{t+1-h}, \psi) \times f(X_{t+1-h}|X_t, \psi) dX_{t+1-h} \\ &= E[f(X_{t+1}|X_{t+1-h}, \psi) | X_t, \psi] \end{aligned} \quad (3-19)$$

이는 이산시간 전이확률밀도함수 $f(X_{t+1}|X_t, \psi)$ 가 X_{t+1-h} 의 함수라 할 수 있는 $f(X_{t+1}|X_{t+1-h}, \psi)$ 에 대해 $f(X_{t+1-h}|X_t, \psi)$ 의 확률로 기대치를 구한 것으로 볼 수 있다. 따라서 짧은 h 시간 동안의 이산시간 전이확률밀도함수 $f(X_{t+1}|X_{t+1-h}, \psi)$ 를 잘 근사할 수 있고 $f(X_{t+1-h}|X_t, \psi)$ 로부터 표본을 효율적으로 추출하는 것이 가능하다면, 이산시간 전이확률밀도함수 $f(X_{t+1}|X_t, \psi)$ 는 몬테카를로적분(Monte Carlo integration)을 이용하여 계산할 수 있다. Pedersen(1995)와 Brandt and Santa-Clara(2002)는 h 기간의 이산시간 전이확률밀도함수를 오일러이산화를 이용한 정규분포로 근사하데 있어 관측시점간의 이산시간전이확률밀도를 근사하는 방법을 제시하였다. 이를 좀 더 자세히 살펴보기로 한다. 식 (3-19)를 k 개의 구간으로 분할된 형태로 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} f(X_{t+1}|X_t, \psi) &= \int f(X_{t+1}|X_{t+1-h}, \psi) \times f(X_{t+1-h}|X_{t+1-2h}, \psi) \times \cdots \\ &\quad \times f(X_{t+1-(k-1)h}|X_t, \psi) dX_{t+1-h} dX_{t+1-2h} \cdots dX_{t+1-(k-1)h} \end{aligned} \quad (3-19')$$

식 (3-19')를 통해 각각의 모든 소구간에서 전이확률밀도함수를 오일러이산화를 이용한 정규분포로 근사한 $f(X_{t+1-(k-1)h}|X_t, \psi)$ 의 전이확률밀도함수로부터 $X_{t+1-(k-1)h}$ 를 생성한 후, 다음 소구간에서는 전이확률밀도함수 $f(X_{t+1-(k-2)h}|X_{t+1-(k-1)h}, \psi)$ 로부터 $X_{t+1-(k-2)h}$ 를 생성하는 방식으로 소구간 $[t+1-2h, t+1-h]$ 까지 오일러이산화를 이용하여 정규분포로 근사한 전이확률밀도함수로부터 표본경로를 생성하면 근사적으로 $f(X_{t+1-h}|X_t, \psi)$ 으로부터 생성한 표본이 됨을 알 수 있다. 그러므로 이러한 방식으로 충분히 많은 수의 표본을 생성하고, 이렇게 생성된 표본을 이용하여 이산시점 $[t, t+1]$ 구간의 전이확률밀도함수를 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$f(X_{t+1}|X_t, \psi) \simeq \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L f(X_{t+1}|X_{t+1-h}^{(j)}, \psi) \quad (3-20)$$

여기에서 $X_{t+1-h}^{(j)}$ 는 $[t, t+1]$ 구간을 k 개의 소구간으로 분할한 다음 각 분할구간의 전이확률밀도함수를 오일러이산화를 적용한 정규분포로 근사시켜서 추출한 j 번째 표본의 마지막구간의 직전 값을 나타낸다. $[t, t+1]$ 구간의 이산시간 전이확률밀도함수를 이와 같이 표본의 마지막구간 직전값만을 이용하여 계산할 수 있는 이유는 식 (3-20)의 적분이 마지막 표본을 제외한 그 이전 소구간의 표본들에 대한 적분소거연산(integrating-out operation)이기 때문이다. 식 (3-20)과 같은 전이확률밀도함수근사를 전체 표본구간에 대하여 적용하면 우도함수를 얻을 수 있고 이를 이용한 근사최우추정(approximate maximum likelihood estimation)이 가능하다.

Durham and Gallant(2002)는 오일러이산화를 이용한 정규분포로부터 표본을 추출하는 방법보다 효율적인 modified Brownian bridge sampling을 이용하여 $[t, t+1]$ 구간의 이산시간 전이확률밀도함수를 근사할 것을 제

안하였으며, Duffie et al.(2003)은 ATSM의 구조적 특성을 이용하여 변동성 요인 상태변수와 같이 이산시간 전이확률밀도함수를 알 수 있는 부분은 직접 계산하고 이산시간 전이확률밀도함수를 알 수 없는 상태변수의 전이확률밀도함수는 Pedersen(1995)와 Brandt and Santa-Clara(2002)와 같이 시물레이션을 이용하여 근사하는 방법을 제안하였다. 그리고 Singleton(2001)은 선형확산과정의 조건부특성함수(conditional characteristic function)를 알 수 있다는 점을 이용하여 식 (3-13)의 역변환을 통해 미관측상태변수를 관측 수익률로 전환시킨 다음 그 확률과정의 조건특성함수를 역푸리에변환(inverse Fourier transform)하여 우도함수를 구하는 방법을 제시하였다. 그 밖에도 Aït-Sahalia(2002)는 Hermite 다항식전개를 이용하여 해석적인 형태를 얻을 수 없는 일반적인 확산과정의 이산시간 전이확률밀도함수를 근사하는 방법을 제안하였다. Cheridito et al.(2007)은 Aït-Sahalia(2002)에서 제시된 근사최우추정법을 extended ATSM 추정에 이용하였다.

2. 칼만필터를 이용한 QML추정법

칼만필터를 이용한 추정(QML estimation via Kalman filter)은 이차율 기간구조모형이 기본적으로 미관측상태변수를 포함하는 상태공간모형이라는 점을 고려하는 경우 가장 자연스러운 추정법으로 볼 수 있다. 칼만필터를 이용하는 경우의 장점은 앞서 살펴본 역변환을 이용한 QMLE에서처럼 특정 만기의 무이표채수익률이 0이라는 다소 자의적인 가정을 할 필요가 없다. 그러나 상태변수의 해석적인 이산시간 전이확률밀도함수를 얻는 것이 용이하지 않다는 동일한 문제를 가지고 있다. 그러므로 역변환을 이용한 QMLE에서와 동일한 방법으로 구한 이산시간 상태변수의 평균과 분산을 가지는 정규분포로 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 근사하는 방법이 이용된다. Duan and Simonato(1999), De Jong(2000), Tang and Xia(2007) 등은 칼만필터를 이용하여 ATSM을 추정하였다. 여기서는 이들 연구에서 제안된 무이표채수익률 ATSM에 대한 칼만필터를

이용한 QML추정법을 간략히 살펴보기로 한다.

칼만필터를 이용하기 위해서 무이표채수익률 ATSM을 다음과 같이 선형 정규상태공간모형(linear normal state space model)으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} y_t = c(\psi) + Z(\psi)X_t + \epsilon_t, & \epsilon_t \sim IN(0, H(\psi)) \\ X_t = d(\psi) + T(\psi)X_{t-1} + \eta_t, & \eta_t \sim IN(0, Q_t(X_{t-1}, \psi)) \end{cases} \quad (3-21)$$

여기에서 y_t 는 서로 다른 만기를 가지는 $(N \times 1)$ 채권수익률벡터이고, X_t 는 $(n \times 1)$ 미관측상태변수벡터를 나타낸다. 관측방정식에서 $c(\psi) = a(\tau)$ 의 $(N \times 1)$ 벡터, $Z(\psi) = b(\tau)$ 의 $(N \times n)$ 행렬로 논의의 편의를 위해서 식 (3-11)의 $a(\tau)$, $b(\tau)$ 가 파라미터 ψ 의 함수라는 것을 명시한 것이다. 오차항 ϵ_t 는 $(N \times 1)$ 벡터, 공분산행렬 $H(\psi)$ $(N \times N)$ 행렬을 가지는 독립적인 정규분포를 나타낸다. 그리고 선형 상태방정식은 식 (3-18)에서 구한 X_t 의 선형함수인 이산시간 평균과 분산을 가지는 정규분포를 따르는 것으로 설정한 것이다. 식 (3-18)에서와 같이 $d(\psi)$ 는 $(n \times 1)$ 벡터, $T(\psi)$ 는 $(n \times n)$ 행렬을 나타내며, 독립적인 정규분포를 따르는 $(n \times 1)$ 오차항벡터 η_t 의 공분산행렬은 $Q_t(X_{t-1}, \psi) = Q_0(\psi) + \sum_{j=1}^n Q_j(\psi)X_{jt-1}$ 와 같이 상태변수 X_t 의 선형함수로 구성되는 개별원소를 가지므로 시변하는 특징을 가지게 된다. 또한 상태방정식의 오차항 η_t 와 관측방정식의 오차항 ϵ_t 는 $E[\eta_t \epsilon_s'] = 0, \forall t, s \in \{1, \dots, T\}$ 의 관계를 충족한다.

식 (3-21)과 같이 ATSM을 정규 선형 상태공간모형으로 설정하면, 다음과 같은 칼만필터를 이용한 QML추정을 할 수 있다.

• 예측

$$\begin{cases} X_{t|t-1} = E[X_t | y_{1:t-1}; \psi] = d(\psi) + T(\psi) X_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} = E[(X_t - X_{t|t-1})(X_t - X_{t|t-1})' | y_{1:t-1}; \psi] \\ = T(\psi) P_{t-1|t-1} T(\psi)' + Q_t(X_{t-1|t-1}, \psi) \end{cases} \quad (3-22a)$$

• 갱신

$$\begin{cases} v_t = y_t - c(\psi) - Z(\psi) X_{t|t-1} \\ F_t = Cov_t(v_t) = Z(\psi) P_{t|t-1} Z(\psi)' + H(\psi) \end{cases} \quad (3-22b)$$

$$\begin{cases} X_{t|t} = E[X_t | y_{1:t}; \psi] = X_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z(\psi)' F_t^{-1} v_t \\ P_{t|t} = E[(X_t - X_{t|t})(X_t - X_{t|t})' | y_{1:t}; \psi] \\ = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z(\psi)' F_t^{-1} Z(\psi) P_{t|t-1} \end{cases} \quad (3-22c)$$

식 (3-22)의 칼만필터절차를 통해서 예측오차 $\{v_t\}_{t=1:T}$ 와 그 공분산행렬 $\{F_t\}_{t=1:T}$ 을 얻을 수 있으며 이를 이용하여 다음과 같은 로그우도함수를 얻을 수 있다.

$$\log L(y_1, y_2, \dots, y_T; \psi) = \sum_{t=1}^T \left(-\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log|F_t| - \frac{1}{2} v_t' F_t^{-1} v_t \right)$$

식 (3-21)의 ATSM에 대한 칼만필터를 이용한 QML추정에서는 두 가지 측면에서 일치성과 효율성의 상실이 있다. 첫째, 식 (3-21)의 ATSM

은 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 식 (3-18)의 평균과 분산을 가지는 정규분포로 근사한 모형이라는 점이다. 둘째, 식 (3-22a)에서 X_t 의 예측공분산행렬을 구함에 있어 상태변수의 공분산행렬 $Q_t(X_{t-1}, \psi)$ 를 구하는 과정에서 전기의 상태변수 실측치 X_{t-1} 이 사용되는 것이 아니라 그 필터추정치 $X_{t-1|t-1}$ 이 사용된다는 점이다. 이는 칼만필터를 이용하여 얻은 파라미터의 추정치가 일치성을 가지지 않는다는 것을 의미한다. 미관측 상태변수가 가우시언 선형과정을 따르는 $A_0(n)$ ATSM의 경우, 식 (3-17)과 식 (3-18)의 이산시간 상태변수의 평균과 분산은 정확한 분포(exact distribution)가 되므로 근사에 따른 일치성과 효율성 상실문제는 발생하지 않는다. 따라서 이 경우 칼만필터를 이용한 최우추정은 정확한 최우추정(exact maximum likelihood estimation)이 되므로 추정치는 일치성과 효율성을 가진다¹⁹⁾.

칼만필터를 이용한 ATSM추정은 Jegadeesh and Pennachi(1996), Ball and Torous(1996), Chen and Scott(1993, 2003), Geyer and Pichler(1996), Gong and Remolana(1996), Babbs and Nowman(1999), Santa-Clara and De Jong(1999) 등의 많은 연구에서 이용된 바 있다. 일반적인 이자율 기간구조모형에 대한 필터링기법을 이용한 추정방법은 QML추정뿐만 아니라 이후 살펴보게 될 SML(simulated maximum likelihood) 추정법, MCMC(Markov chain Monte carlo)를 이용한 베이지언 추정법 등의 시뮬레이션기반 추정방법에 일반적으로 이용되는 방법이다. 또한 무이표채 수익률 이자율 기간구조모형의 경우에는 선형상태공간모형으로 모형을 설정하고 QML추정을 적용하지만 이표채수익률, 금리스왑 등과 같은 비선형모형에는 비선형칼만필터를 이용하여 모형을 근사하는 방법이 사용된다. 이러한 비선형칼만필터로는 EKF(extended Kalman filter), IEKF(iterated Kalman filter), UKF(unscented Kalman filter) 등이 있다. Chen and Scott(2003)에서는 $A_n(n)$ ATSM모형추정에 EKF를 이용하였

19) 이와 관련한 보다 자세한 논의는 Lund(1997)을 참조할 수 있다.

으며, Lund(1997)은 이표채수익률 기간구조 모형에 IEKF를 이용하는 방법을 제시하였다. 그리고 Christoffersen et al.(2009)와 Chen et al.(2008)에서는 이표채수익률, CDS수익률(Credit Default Swap rate)의 기간구조 모형 추정에 UKF를 이용하는 방법을 제시하고 있다²⁰⁾. 1계 테일러전개를 이용하여 근사하는 EKF와 달리 UKF는 unscented transformation을 이용하여 상태변수의 예측평균 근방의 시그마포인트(sigma points)를 구성하여 비선형상태공간모형을 근사하는 방법으로 근사정도(approximation accuracy)를 높이는 필터링기법이다. 형태적으로는 모형의 비선형성을 근사하지만 실질적으로 적절하게 선택된 시그마포인트를 이용하여 모형의 분포를 잘 근사하는 필터링기법이다. UKF는 상태방정식을 포함한 상태공간모형의 비선형성이 높을수록 정도 EKF보다 우월한 결과를 주는 것으로 알려져 있다.

제 3 절 SML추정법

앞서 살펴본 것과 같이 식 (3-11)의 ATSM에 대한 칼만필터를 이용한 QML추정은 비정규성(non-normality)을 유발하는 이산시간 상태변수의 전이확률밀도함수를 평균과 분산이 동일한 정규분포로 근사하여 식 (3-21)의 선형정규상태공간모형을 추정하는 것이다. 그러나 이러한 정규분포를 이용한 근사는 일반적으로 일치성과 효율성을 가지지 않는 것으

20) 1계 테일러전개(first-order Taylor expansion)를 이용하여 비선형상태공간모형에 대한 근사를 하는 EKF와 달리 UKF는 unscented transformation을 이용하여 상태변수의 예측평균 근방의 시그마포인트를 구성하여 비선형상태공간모형을 근사하는 방법으로 근사정도(approximation accuracy)를 높이는 필터링기법이다. 그런데 이러한 시그마포인트를 선택하는 엄밀한 기준이 존재하지 않으므로 시그마포인트 구성에 자의성이 개입될 가능성이 있다. UKF는 공학분야에서 비선형상태공간모형의 상태변수 추정에 일반적으로 이용되고 있는 방법이다. 이에 대한 보다 자세한 논의는 Julier and Uhlmann(2004)와 이들의 참고문헌을 참조할 수 있다.

로 알려져 있다. SML추정법(simulated maximum likelihood estimation)은 ATSM에 대한 QML추정에서 상태방정식에 대한 정규분포근사가 가지는 문제점을 해결하기 위하여 중요표본추출법(importance sampling)을 이용한다. 중요표본추출법을 이용한 SML추정법은 Durbin and Koopman(1997), Sandmann and Koopman(1998)에서 확률변동성모형에 대한 추정방법으로 제시되었다. 확률변동성모형에서는 상태방정식이 아니라 관측방정식이 비선형과 비정규성을 유발하는 원인인데 이를 해결하는 방법으로 중요표본추출법을 이용한 SML추정법이 이용되고 있다. 이들 연구와 유사한 방법으로 Brandt and He(2006)는 상태방정식이 비정규성을 유발하는 식 (3-11)의 ATSM에 대한 중요표본추출법을 이용한 SML추정법을 제안하고 있다.

식 (3-11)의 ATSM과 같이 미관측상태변수를 포함하는 상태공간모형의 우도함수는 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 L(\psi) &= p(Y|\psi) \\
 &= \int p(Y, X|\psi) dX \\
 &= \int p(Y|X, \psi) p(X|\psi) dX
 \end{aligned} \tag{3-23}$$

여기에서 $Y = (y_1', y_2', \dots, y_T')'$, $X = (X_1', X_2', \dots, X_T')'$ 로 각각 관측된 만기별 무이표채수익률을 나타내는 $(T \times N)$ 행렬과 미관측상태변수를 나타내는 $(T \times n)$ 행렬이며, ψ 는 모형에 포함된 파라미터들을 나타낸다. 식 (3-23)은 식 (3-11)의 ATSM의 우도함수가 미관측상태변수 X 가 주어졌을 때의 Y 의 조건부확률밀도함수와 X 의 주변확률밀도함수(marginal probability density function)로 분해될 수 있음을 보여준다. 또한 우도함수는 Y 의 조건부확률밀도함수를 X 의 주변확률밀도함수에 대하여 기대치를 취하면 구할 수 있다는 것을 보여주고 있다. 그런데 이러한 기대치를 취하는 과정은 미관측상태변수 X 에 대하여 $n \times T$ 차원의 적분을 취하는 과

정과 같다. 차원이 작다면 수치적으로 적분하는 것이 가능할 수 있지만 일반적으로 이러한 $n \times T$ 차원의 적분은 사실상 불가능하다. 이와 같이 사실상 수치적으로도 불가능한 적분이라 하더라도 시뮬레이션을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 이 때 X 의 주변확률밀도함수 $p(X|\psi)$ 로부터 T 기까지의 미관측상태변수의 표본을 추출하여 우도함수를 계산하는 방법은 수치적으로 불안정하고 비효율적이어서 수렴속도가 매우 느리다는 문제점이 있다. 보다 효율적인 추정을 위해 미관측상태변수의 표본생성에 따른 몬테카를로 분산(Monte Carlo variance)을 줄이면서 수렴속도를 가속화시키는 방법을 사용할 수 있다. 이에 대한 해결 방법으로 몬테카를로 분산을 줄이는 중요표본추출법²¹⁾과 같은 방법이 일반적으로 이용되고 있다.

Brandt and He(2006)는 ATSM에 대한 SML추정에서 식 (3-23)의 우도함수를 계산하기 위하여 표본생성확률밀도함수(candidate generating probability density function)로 식 (3-22)의 선형상태공간모형의 우도함수를 이용할 것을 제안하였다. 이를 QML우도함수라 하면, QML우도함수는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 L_{QML}(\psi) &= p_{QML}(Y|\psi) && \dots\dots\dots (a) \\
 &= \frac{p_{QML}(Y, X|\psi)}{p_{QML}(X|Y, \psi)} && \dots\dots\dots (b) \\
 &= \frac{p_{QML}(Y|X, \psi) p_{QML}(X|\psi)}{p_{QML}(X|Y, \psi)} && \dots\dots\dots (c) \\
 &= \frac{p(Y|X, \psi) p_{QML}(X|\psi)}{p_{QML}(X|Y, \psi)} && \dots\dots\dots (d)
 \end{aligned}
 \tag{3-24}$$

식 (3-24)의 (a)에서 (b)로 가는 과정에서는 베이즈정리가 이용되며, (c)에서(d)로 가는 과정에서는 식 (3-11)의 무이표채수익률 ATSM에서 관

21) Geweke(1989)는 이에 대한 자세한 논의를 제시하고 있으니 이를 참조할 수 있다.

측치방정식의 확률밀도함수가 정규분포를 따르므로 QML우도함수의 확률밀도함수와 동일하다는 것이 이용된다. 식 (3-24)를 $p(Y|X, \psi)$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$p(Y|X, \psi) = L_{QML}(\psi) \frac{p_{QML}(X|Y, \psi)}{p_{QML}(X|\psi)}$$

이를 식 (3-23)의 ATSM의 우도함수에 대입하여 정리하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \int p(Y|X, \psi) p(X|\psi) dX \\ &= L_{QML}(\psi) \int \frac{p(X|\psi)}{p_{QML}(X|\psi)} p_{QML}(X|Y, \psi) dX \\ &= L_{QML}(\psi) E_{QML} \left[\frac{p(X|\psi)}{p_{QML}(X|\psi)} \mid Y, \psi \right] \end{aligned} \quad (3-25)$$

여기에서 $E_{QML}[\cdot]$ 은 선형정규상태공간모형에서 미관측상태변수의 사후조건부확률밀도함수(posterior conditional probability density function) $p_{QML}(X|Y, \psi)$ 에 대한 기대치를 나타낸다. 식 (3-25)는 QML우도함수를 표본생성확률밀도함수로 이용하는 것이 식 (3-22)의 선형정규상태공간모형 미관측상태변수의 사후조건부확률밀도함수를 표본생성확률밀도함수로 이용하는 것으로 축약됨을 의미한다. $p_{QML}(X|Y, \psi)$ 로부터 미관측상태변수의 표본을 추출하는 방법으로는 선형상태공간모형에 대한 MCMC를 이용한 베이저언 추론에서 일반적으로 이용되는 Carter and Kohn(1994), Frühwirth-Schnatter(1994)의 FFBS알고리즘(forward filtering backward sampling) 또는 De Jong and Shephard(1995), Durbin and Koopman(2002)의 시뮬레이션스무더(simulation smoother)가 이용될 수 있다. 또한 식 (3-25)는 ATSM의 우도함수를 QML우도함수와 보정항

(correction factor) $E_{QML} [w(X)|Y, \psi]$ 의 곱으로 나타낼 수 있음을 보여준다. 보정항에 포함된 $w(X)$ 는 다음과 같다.

$$w(X) = \frac{p(X|\psi)}{p_{QML}(X|\psi)}$$

보정항은 정규분포가 아닌 미관측상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 정규분포로 근사하는데 따른 괴리도를 나타낸다. $A_0(n)$ ATSM에서와 같이 미관측상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수가 정규분포를 따르는 경우 교정항 $w(X)$ 는 1이 되고 중요표본추출법을 이용한 우도함수가 정확한 우도함수(exact likelihood)와 같아짐을 알 수 있다.

중요표본추출법을 이용한 SML에서는 표본생성확률밀도함수로부터 충분히 많은 수의 미관측상태변수의 표본경로를 추출하여 교정항을 계산하는 것이 필요하다. 이를 위해 L 개의 표본경로를 추출하였다면 교정항은 추출된 표본을 이용하여 계산한 $w(X)$ 의 표본평균으로 얻을 수 있다.

$$\bar{w} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L w(X^{(i)}) \quad (3-26)$$

여기에서 $X^{(i)}$ 는 표본생성확률밀도함수 $p_{QML}(X|Y, \psi)$ 으로부터 추출한 i 번째 표본경로를 나타낸다. 이를 이용하면 식 (3-25)는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{L}(\psi) = L_{QML}(\psi) \bar{w} \quad (3-25')$$

$L \rightarrow \infty$ 일 때 $\bar{w} \rightarrow E_{QML}[w(X)|Y, \psi]$ 이 성립하므로 $\hat{L}(\psi) \rightarrow L(\psi)$ 이다. 그리고 $\hat{\psi}_{SML} \rightarrow \hat{\psi}_{ML}$ 이 성립한다.

일반적인 최우추정법에서와 마찬가지로 SML에서도 로그우도함수를

최적화하는 것이 보다 용이하다. 식 (3-25')에 자연대수를 취하면 다음과 같다.

$$\log \hat{L}(\psi) = \log L_{QML}(\psi) + \log \bar{w} \quad (3-27)$$

그런데 로그함수는 오목함수로 $E[\log \bar{w}] \neq \log E[\bar{w}]$ 이므로 식 (3-27)의 $\log \hat{L}(\psi)$ 는 $\log L(\psi)$ 에 대한 불편추정량이 아니다. Durbin and Koopman (1997), Shephard and Pitt(1997)은 편의를 제거하기 위하여 다음과 같이 $\log \hat{L}(\psi)$ 을 계산할 것을 제안하였다.

$$\log \hat{L}(\psi) = \log L_{QML}(\psi) + \log \bar{w} + \frac{\eta_w^2}{2L\bar{w}^2}$$

여기에서 $\eta_w^2 = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (w_i - \bar{w})^2$ 이다. 중요표본추출법을 이용한 SML에

서 식(3-26)을 추출된 표본을 계산하기 위해서는 분자와 분모에서 상태변수

의 이산시간 전이확률밀도함수 $p(X|\psi) = p(X_0|\psi) \prod_{t=1}^T p(X_t, t | X_{t-1}, t-1, \psi)$

와 $p_{QML}(X|\psi) = p_{QML}(X_0|\psi) \prod_{t=1}^T p_{QML}(X_t, t | X_{t-1}, t-1, \psi)$ 을 계산하는 것이

필요하다. 분모에 포함된 QML모형의 상태변수 이산시간 전이확률밀도함수는 정규분포이므로 쉽게 계산할 수 있다. 그러나 일반적으로 분자에 포함된 상태변수의 전이확률밀도를 구하는 것은 용이하지 않다. 앞서 언급된 것과 같이 상태변수의 확률과정이 Ornstein-Uhlenbeck 과정이나 독립적인 CIR 과정이 아닌 경우 이산시간확률밀도함수의 해석적인 형태를 알 수 없는 경우가 대부분이다. Brandt and He(2006)은 이를 계산하는 방법으로는 앞서 언급된 Singleton(2001)에서와 같이 선형확산과정의 조건부특성함수(conditional characteristic function)에 대한 역푸리에변환

(inverse Fourier transform)을 이용하여 우도함수를 계산하는 방법 또는 Ait-Sahalia(2002)에서 제안된 Hermite 다항식전개(Hermite polynomial expansion)를 이용하여 근사우도함수(approximate likelihood)를 계산하는 방법을 제시하고 있다²²⁾.

중요표본추출법을 이용한 SML추정법은 QML추정에 따른 일치성과 효율성 상실의 문제를 해결하는 방법이라고 할 수 있다. 미관측상태변수에 대한 표본추출을 한다는 측면에서 이후 살펴보게 될 MCMC를 이용한 베이지언 추론과도 밀접한 관련을 가지는 추정방법이다. 그러나 중요표본추출을 이용하여 우도함수를 근사하고 이에 대한 수치최적화를 통해서 모형을 추정하는 과정에서 수치적으로 불안정성을 보일 수 있다는 단점이 있다.

제 4 절 간접추론추정법, MSM, EMM

간접추론추정법(Indirect Inference, 이하 II)은 이자율 기간구조모형이나 확률변동성모형과 같이 미관측상태변수를 포함하는 복잡한 모형에 대한 추정방법으로 유용한 방법이다. 특히 연속시간 이자율 기간모형과 같이 미관측상태변수의 확률과정의 이산시간 전이확률밀도를 구하기 어려운 경우에도 상태변수의 확률과정으로부터 표본을 생성하는 것이 가능할 때 이용할 수 있는 모형추정법이다. 이러한 간접추론추정법은 Smith (1993), Gouriéroux et al.(1993), Duffie and Singleton(1993), Gallant and Tauchen(1996) 등에 의해 제안되었다. II 추정법들은 다루기 어려운 구조모형(true model), 즉 이자율 기간구조모형 또는 확률변동성모형을 비

22) 이런 방법들을 이용하면 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 계산할 수 있지만 분석을 위한 프로그램작성의 측면에서는 지나치게 복잡한 방법이다. 이러한 특징으로 인해 SML추정법을 이용한 실증분석은 드물다. 시뮬레이션을 이용하는 Pedersen(1995), Brandt and Santa-Clara(2002), Durham and Gallant(2002)에서 제시된 방법을 이용할 수도 있지만 이 경우에는 지나치게 많은 시간이 소요되는 단점이 있다.

교적 다루기 쉬운 보조모형(auxiliary model)을 이용하여 추정한다는 공통적인 특징을 가진다. 이들 방법에서 이용하고 있는 보조모형은 엄격히 본다면 설정오류(misspecification)가 있는 모형이다. II 추정법에서는 올바르게 설정된 구조모형²³⁾(well specified structural model)에 대한 시뮬레이션을 통해 생성된 표본을 보조모형을 이용하여 캘리브레이션(calibration)하는 과정을 통해 자동적인 편의 수정(bias correction)이 이루어지게 된다. II 추정법은 기본적으로 이와 같은 캘리브레이션을 이용한 추정법이라는 공통적인 특징이 있지만 Smith(1993), Gouriéroux et al.(1993)의 II 추정법과 Gallant and Tauchen(1996)의 EMM(efficient method of moments) 추정법, 그리고 Duffie and Singleton(1993)의 MSM(method of simulated moment) 추정법은 보조모형을 이용하여 구조모형을 캘리브레이션하는 방법에 있어서 다소 차이가 있다.

일반적으로 좁은 의미의 II 추정법은 Smith(1993), Gouriéroux et al.(1993)에서 제시된 추정방법을 가리킨다. 먼저 이들의 연구에서 제시된 추정방법을 살펴보자. 구조모형 추정을 위해 사용될 보조모형을 $f_a(y_t | Y_{t-1}, \beta)$ 로 나타내기로 한다. 여기에서 β 는 보조모형의 파라미터를 나타내며, Y_{t-1} 은 $t-1$ 기까지의 관측치를 나타낸다. 여기서는 논의의 편의를 위하여 외생변수는 생략한다. 이자율 기간구조모형을 추정하기 위한 보조모형으로는 칼만필터를 이용한 QML추정법에서 설정한 식 (3-21)의 선형상태공간모형 또는 만기수익률변화 $\Delta y_t(\tau) = y_t(\tau) - y_{t-1}(\tau)$ 에 대한 VAR-GARCH모형 등이 사용될 수 있을 것이다. 또는 Smith(1993), Gouriéroux et al.(1993)에서와 같이 VARMA(p,q)모형을 보조모형으로 사용할 수도 있을 것이다. 이렇게 설정된 보조모형의 파라미터에 대한 추정치를 $\hat{\beta}(Y_T)$ 로 나타내기로 하고 이를 보다 간단히 $\hat{\beta}_T$ 로 쓰기로 한다. 관측치 Y_T 에 대한 보조모형의 파라미터 추정치 $\hat{\beta}_T$ 를 얻을 수 있다면 II 추정법에 의한 구조모형(연속시간 이자율 기간구조모형)의 추정치 $\hat{\psi}_{II}$ 는 다음과 같이

23) II 추정법에서는 추정하고자 하는 참모형(true model)을 구조모형이라 한다.

얻어진다.

$$\hat{\psi}_T = \operatorname{argmin}_{\psi} [\hat{\beta}_T - \tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(\psi)]' W_n [\hat{\beta}_n - \tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(\psi)] \quad (3-28)$$

여기에서 W_T 은 가중치행렬(weighting matrix)을 나타내며, $\tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(\psi)$ 는 아해와 같이 구조모형으로부터 생성한 H 개의 표본경로에 대한 보조모형의 파라미터 추정치의 평균을 나타낸다.

$$\tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(\psi) = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^H \hat{\beta}_{\tilde{T}}^{(j)}(\psi)$$

여기에서 $\hat{\beta}_{\tilde{T}}^{(j)}(\psi)$ 는 구조모형의 파라미터 ψ 가 고정된 것으로 가정하고 구조모형을 이용하여 생성된 표본의 크기가 \tilde{T} 인 j 번째 표본에 대한 보조모형의 파라미터 추정치를 나타낸다. 그리고 구조모형의 파라미터 ψ 의 식별을 위해 $\dim(\beta) \geq \dim(\psi)$ 의 식별조건이 충족되어야한다. 파라미터 $\tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(\psi)$ 는 ‘binding function’이라고 하는데, 표본생성 횟수 H 가 증가함에 따라서 $\hat{\beta}(\psi)_{H\tilde{T}} = \lim_{H \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(Y_T^{(H)})$ 로 수렴하는 성질을 가진다. II 추정법은 초기에 구조모형의 파라미터가 고정된 것으로 가정하고 구조모형으로부터 표본경로를 생성한 후, 생성된 표본경로를 이용하여 추정한 보조모형의 파라미터 추정치와 관측치에 대한 보조모형의 추정치의 거리를 최소화하는 구조모형의 파라미터를 얻는 과정을 반복적으로 적용하는 방법이다. 그러므로 보조모형의 파라미터 $\tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(\psi)$ 를 얻는 방법이 간단하지 않다면, 즉 보조모형에 대한 추정치를 얻는 방법이 최우추정법과 같은 최적화 과정을 포함한다면, 구조모형의 파라미터 ψ 의 추정을 위해서 매우 많은 계산시간이 소요될 수 있다. 즉 생성된 표본경로에 대한 보조모형의 파라미터 추정치 $\tilde{\beta}_{H\tilde{T}}(\psi)$ 와 관측치에 대한 보조모형의 파라미터 추정치 $\hat{\beta}(Y_T)$ 의 비

교과정(binding function에 대한 평가과정)이 비선형최적화를 포함하는 경우에는 추정에 비교적 많은 시간이 소요되는 단점이 있다.

Duffie and Singleton(2000)은 식 (3-28)의 보조모형의 파라미터에 대한 평가과정(binding function 평가과정)을 관측된 자료로부터 구할 수 있는 구조모형으로부터 유도되는 적률조건이나 이론적인 적률조건, 이자율 또는 자산수익률이 가지는 전형적인 특징에 대한 통계적 적률 등에 대한 평가과정으로 대체하는 MSM추정법을 제안하였다. GMM추정에서와 마찬가지로 MSM추정에서도 적률조건의 수는 추정해야할 구조모형의 파라미터의 수보다 크거나 같아야 한다.

$$\hat{\psi}_{MSM} = \operatorname{argmin}_{\psi} \left(g_T^*(Y_T) - \frac{1}{H} \sum_{s=1}^H g^*(\tilde{Y}_T^{(j)}, \psi) \right)' W_T \left(g_T^*(Y_T) - \frac{1}{H} \sum_{s=1}^H g^*(\tilde{Y}_T^{(j)}, \psi) \right) \quad (3-29)$$

여기에서 W_T 는 가중치행렬을 나타내며, $g_T(Y_T)^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_t(y_t | y_{1:t-1})$ 로 관측된 자료를 이용하여 얻을 수 있는 적률조건을 낸다. 그리고 $g^*(\tilde{Y}_T^{(j)}, \psi)$ 는 구조모형의 파라미터 ψ 가 고정된 것으로 가정하고 구조모형을 이용하여 생성된 표본의 크기가 \tilde{T} 인 j 번째 표본으로 구성된 적률조건을 나타낸다. 식 (3-29)의 MSM추정에서는 관측된 자료를 이용하여 쉽게 계산할 수 있는 적률조건과 구조모형의 파라미터 ψ 의 함수인 구조모형으로부터 생성한 표본을 이용하여 계산한 적률조건의 평균이 일치하도록 하는 방법을 통해 파라미터를 추정한다. 그러므로 식 (3-28)의 II추정법과 비교해 binding function에 대한 평가과정이 단순한 특징이 있다. 그러나 일반적인 GMM추정에서와 마찬가지로 모형의 효율적인 추정을 위해서는 구조모형의 특성을 충분히 반영할 수 있도록 적률조건이 설정되어야 한다. 그러나 효율적인 추정을 위한 적률조건의 수를 선택하는데 있어서는 명시적인 기준이 존재하지 않는 문제점이 있다. MSM추정법에 관한 보다 자

세한 논의는 Duffie and Singleton(1993), Singleton(2006)에 제시되어 있으므로 이들을 참조할 수 있다.

EMM추정법(efficient method of moments)은 앞서 살펴본 II 추정법의 binding function에 대한 평가과정에서 지나친 추정시간 소요문제와 MSM의 효율적인 추론에 필요한 적률조건의 수를 선택해야 문제를 해결하는 간접추론방법이다. Gallant and Tauchen(1996)에 의해 제안된 EMM추정법은 II 추정법에서 이용되는 ‘binding function’에 대한 평가과정을 보조모형의 로그우도함수로부터 얻을 수 있는 스코어함수(score function)로 대체하는 방법으로 MSM의 적률대응조건(moment matching condition)을 결정하는 방법이다. 그러므로 구조모형의 파라미터 ψ 의 EMM추정치는 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{\psi}_{EMM} = \operatorname{argmin}_{\psi} m_{\tilde{T}}(\psi, \hat{\beta}_T)' W_T m_{\tilde{T}}(\psi, \hat{\beta}_T) \quad (3-30)$$

여기에서 적률대응조건에 해당하는 $m_{\tilde{T}}(\psi, \hat{\beta}_T)$ 는 식 (3-31)과 같이 구조모형의 파라미터 ψ 가 고정된 것으로 가정하고 구조모형으로부터 생성한 표본 $\tilde{Y}(\psi)$ 을 이용하여 보조모형의 파라미터추정치 $\hat{\beta}_T$ 에서 평가한 스코어의 기대치로 정의된다. 이 때 MSM과 마찬가지로 파라미터의 식별조건 $\dim(\beta) \geq \dim(\psi)$ 이 충족되어야 한다.

$$m_{\tilde{T}}(\psi, \hat{\beta}_T) = \frac{1}{\tilde{T}} \sum_{s=1}^{\tilde{T}} \left(\frac{\partial \log f(\tilde{y}_s(\psi) | \tilde{Y}_{s-1}(\psi); \beta)}{\partial \beta} \right)_{\beta = \hat{\beta}_T} \quad (3-31)$$

여기에서 $\partial \log f(\cdot | \cdot) / \partial \beta$ 는 보조모형의 로그우도함수를 보조모형의 파라미터 β 로 미분한 스코어함수를 나타내며 $Y_s(\psi) = \{y_1(\psi), \dots, y_{s-1}(\psi)\}$ 이다. 식 (3-30)를 계산하기 위하여 구조모형으로부터 표본을 생성할 때 일반적으로 생성된 표본 크기(\tilde{T})는 관측된 자료의 표본의 크기(T)보다 더 커야한다 ($\tilde{T} \gg T$). 그리고 식 (3-30)에서 가중치행렬 W_T 는 보조모형이

관측된 자료의 특성을 충분히 잘 설명한다는 가정 하에 다음과 같은 보조 모형의 파라미터추정치 $\hat{\beta}_T$ 에서 평가한 스코어의 공분산행렬(information matrix)의 역행렬을 이용한다.

$$I_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\frac{\partial f(y_t | Y_{t-1}, \hat{\beta}_T)}{\partial \beta} \right] \left[\frac{\partial f(y_t | Y_{t-1}, \hat{\beta}_T)}{\partial \beta} \right]',$$

그러나 보조모형이 관측된 자료를 충분히 적합하지 못하는 경우에는 GMM추정에서 최적가중치행렬을 구하는 방법에서와 같이 보조모형의 스코어의 HAC공분산행렬(heteroskedasticity consistent covariance matrix)을 이용할 수 있다.

EMM추정법은 다른 간접추론추정법들과는 달리 일련의 모형설정과 관련된 검정방법을 제시하고 있다. EMM추정에서 구조모형설정의 충분성(model adequacy)에 대한 검정통계량은 GMM추정법의 과다식별(over-identification)조건에 대한 Hansen J-test와 유사하게 다음과 같이 정의된다.

$$T m_{\bar{T}}(\hat{\psi}_T, \hat{\beta}_T)' (I_T)^{-1} m_{\bar{T}}(\hat{\psi}_T, \hat{\beta}_T) \xrightarrow{d} \chi^2(q) \quad (3-32)$$

식 (3-32)과 같이 정의되는 검정통계량은 구조모형에 모형설정오류가 없다는 귀무가설 하에서 자유도 $q = \dim(\beta) - \dim(\psi)$ 를 가지는 카이제곱분포를 따른다. 그리고 구조모형의 설정오류에 대한 검정통계량으로 다음과 같은 표준화된 스코어(normalized score)를 이용한 통계량이 제시되었다.

$$\hat{T}_T = \hat{S}_T^{-1} \sqrt{T} m_T(\hat{\psi}_T, \hat{\beta}_T) \quad (3-33)$$

여기서 $\hat{S}_T = \text{diag} \left\{ \left[\hat{I}_T - \hat{M}_T (\hat{M}_T' \hat{I}_T^{-1} \hat{M}_T)^{-1} \hat{M}_T \right]^{1/2} \right\}$, $\hat{M}_T = \frac{\partial}{\partial \psi} m_T(\hat{\psi}_T, \hat{\beta}_T)$

이다. $\dim(\beta)$ 차원 통계량 \hat{T}_T 에서 각각의 항들은 귀무가설하에서 점근적으로 정규분포를 따른다. 일반적으로 식 (3-33)의 통계량 각각은 구조모형이 충분히 포착하지 못하는 관측된 자료의 특성에 대한 정보를 주는 것으로 해석할 수 있다. 그러나 이들 통계량은 구조모형설정에 대한 보조적인 정보를 주는 것으로만 해석해야 함을 주의하여야 한다.

EMM추정법은 일반적으로 보조모형이 비모수적인 특성을 가지도록 허용함으로써 $\hat{\psi}_{EMM}$ 가 점근적으로 구조모형에 대한 최우추정치와 같은 효율성을 가질 수 있도록 하며, 보조모형의 스코어를 이용하여 구조모형의 모형설정오류(misspecification)를 검정할 수 있는 특징을 가지고 있다 [Gallant and Long(1997), Tauchen(1997)]. 또한 EMM추정치는 최우추정치에 준하는 일치성과 효율성을 가지는 것으로 알려지고 있다. 그러나 시뮬레이션을 이용하여 구조모형으로부터 표본을 생성한다는 것과 이렇게 생성된 표본을 이용하여 구성된 적률대응조건의 이차형식을 최소화하는 방법으로 추정치를 구하는 GMM추정법을 결합하는 특성을 가지고 있다는 사실을 고려하면, EMM추정치의 성과는 보조모형이 관측된 자료의 특성을 얼마나 잘 포착하느냐에 따라 결정됨을 알 수 있다. 이는 Gallant and Long(1997)에서 명확히 제시되어 있는데, 보조모형의 스코어 벡터(score vector)가 참스코어 벡터(true score vector)를 점근적으로 생성(span)할 수 있도록 보조모형이 선택되는 경우에 EMM추정치는 최대의 점근적 효율성(full asymptotic efficiency)을 가질 수 있다는 점을 제시하고 있다. Gallant and Tauchen(2009, 2010)은 EMM추정치가 점근적 효율성을 가질 수 있도록 하는 방법으로 SNP모형을 보조모형으로 이용할 것을 제시하였다. 또한 EMM추정치의 효율성은 대표본의 경우에는 최우추정치의 효율성으로 접근하고 강건한(robust) 특성을 보이지만, 소표본의 경우에는 이용되는 보조모형에 따라 매우 민감한 특성을 보이는 것으로 나타나 있다. EMM추정에서 주의할 점은 보조모형의 선택에 있어서 보조모형이 지나치게 많은 수

의 파라미터(over-parameterization)를 가지게 되어, 관측된 자료의 특이잡음(idiosyncratic noise)마저도 적합(fitting)하지 않도록 주의해야 한다. 지나치게 많은 수의 파라미터를 가진 보조모형이 관측된 자료의 특이잡음마저 적합하게 되면 최적화과정에서 수렴의 문제(convergence problem)가 발생할 수 있기 때문이다. EMM에 대한 자세한 논의는 Gallant and Tauchen(2009, 2010)을 참조할 수 있다.

Dai and Singleton(2000)은 ATSM, Ahn et al.(2002,2003)은 QTSM, 그리고 ATSM과 QTSM특성을 모두 가진 모형(hybrid model) 추정, Bansal et al.(2002)는 국면전환(regime switching) ATSM 추정에 EMM을 이용하였다. EMM을 포함한 간접추론추정법의 장점은 추정하고자하는 모형의 개별적인 특성에 크게 의존하지 않고 모형으로부터 표본을 생성할 수만 있다면 일반적으로 적용할 수 있다는 것이다. 이러한 특성과 EMM 추정이 점근적 효율성을 가질 수 있다는 특성으로 인하여 국면전환 이자율 기간구조모형 뿐 만 아니라 도약(jump)을 포함하는 다양한 이자율 기간구조모형 추정에 이용되고 있다. 그러나 Duffee and Stanton(2004, 2008)은 시뮬레이션 실험을 통해 이자율 기간구조모형 추정에 이용되는 채권수익률 자료와 같이 횡단면적 종속성이 크고 시계열적으로 지속성이 큰 자료의 경우 다른 추정법들에 비해 EMM추정치의 편의(bias)와 분산이 큰 결과를 얻을 수 있음을 보여주었다. 특히 시계열적으로 거의 단위근에 가까운 지속성은 EMM을 비롯한 모든 간접추론추정을 어렵게 하는 원인이 될 수 있다.

여기에서 살펴본 II, MSM, EMM의 일반적인 간접추론방법 논의에서는 구조모형 즉, 식 (3-1)의 연속시간 이자율 기간구조모형으로부터 이산시간 표본(채권수익률)을 생성할 수 있다는 가정을 하고 있다. 그러나 연속시간 이자율 기간구조모형으로부터 표본을 생성할 때 자료생성빈도와 실제 이용하는 표본의 빈도, 그리고 파라미터가 안정적으로 수렴할 수 있도록 하기 위하여 표본생성모형의 오차항은 항상 동일한 값으로 유지²⁴⁾

24) 표본생성 프로그램에서 표본생성모형의 오차항을 생성할 때 난수생성을 위

(stochastic equicontinuity)하여야 한다. 특수한 경우를 제외하면 선형확산 과정으로 설정된 미관측상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수는 일반적으로 알려져 있지 않거나 해석적인 형태를 얻을 수 없는 경우가 대부분이다. 그러므로 선형확산과정을 따르는 상태변수의 이산표본을 추출하는 것이 용이하지 않다. 일반적으로 이자율 기간구조모형, 확률변동성모형 등의 미관측상태변수를 확산과정으로 설정한 연속시간모형으로부터 이산시간 표본을 생성할 경우 오일러이산화로 연속시간모형을 이산시간모형으로 전환한 모형에서 표본을 생성하는 방법이 이용된다. 이 때 이산시간모형으로부터 표본을 생성할 때, 관측된 자료보다 짧은 시간간격으로 표본을 생성해야 한다는 것을 주의할 필요가 있다. 이는 식 (3-19')의 이산시간 전이확률밀도함수로부터 표본을 생성하는 방법과 같이 이산시간 전이확률밀도함수를 오일러이산화를 이용한 정규분포로 근사하기 위해서는 연속적인 이산시간 시점 사이의 거리가 충분히 짧아야 하기 때문이다. 예를 들어 주어진 자료가 주간자료라면 EMM과 같은 간접추론추정법을 적용하기 위해서는 일간 또는 그 이하의 빈도에서 연속시간 이자율기간모형의 오일러이산화모형으로부터 표본을 생성해야 한다. 그리고 이렇게 생성된 모든 표본을 간접추론추정법에 이용하는 것이 아니라 관측된 자료의 빈도와 동일한 빈도의 표본들만을 이용해야 한다. 이자율 기간구조모형으로부터 표본을 생성하면 미관측상태변수에 대한 표본이 생성되지만 이들 미관측상태변수는 간접추론에 이용되지 않는다²⁵⁾.

한 seed를 고정시키면 된다.

25) 미관측상태변수 x 를 포함하는 상태공간모형의 관측치 y 의 주변확률밀도함수는 다음과 같다.

$$p(y|\cdot, \theta) = \int p(y, x|\cdot; \theta) dx$$

파라미터 θ 가 고정된 것으로 가정하고 주변확률밀도함수로부터 관측치 y 를 생성하는 것은 적분을 포함하고 있어 매우 복잡한 것처럼 보인다. 그러나 시뮬레이션을 이용하는 경우 이를 매우 간단하게 수행할 수 있다. 시뮬레이션을 이용한 베이지언 추론에서와 마찬가지로 관측치 y 와 미관측상태변수 x 의 결합확률밀도함수 $p(y, x|\cdot; \theta)$ 에 대한 표본 (y, x) 를 생성한 다음, x 을 버리면 간단히

제 5 절 MCMC를 이용한 베이지언 추론

지금까지 살펴본 고전적 접근법과 여기에서 앞으로 살펴볼 베이지언 접근법에는 기본적으로 중요한 차이점이 존재한다. 고전적 접근법에서는 추정해야 할 파라미터를 미지의 고정된 상수로 보고 이에 대한 통계적 추론을 하는 반면 베이지언 접근법에서는 파라미터를 확률변수로 보고 이에 대한 통계적 추론을 한다. 이런 차이점 외에도 식 (3-1)의 이자율 기간구조모형과 같은 미관측상태변수를 포함하는 모형에 대한 베이지언 추론에서는 미관측상태변수 또한 파라미터와 같이 확률변수로 간주한다. 앞서 살펴본 우도함수를 기반으로 하는 모든 추정방법들은 기본적으로 식 (3-23)에서와 같이 이자율 기간구조모형의 우도함수를 얻기 위하여 미관측상태변수를 적분 소거(integrating-out)하는 접근법을 따르고 있다. 그러나 베이지언 추론에서는 미관측상태변수를 확률변수로 간주하므로 이 상태변수에 대한 조건부 사후확률밀도함수(conditional posterior probability density function)로부터 표본을 추출하는 방법이 이용된다. 그러므로 고전적 접근법에서는 미관측상태변수가 파라미터 추정치를 얻고 난후 이를 고정된 값으로 보고 부가적인 필터링절차를 이용하여 얻어지는 부산물인 반면 베이지언 추론에서는 자료 확장(data augmentation)의 원리가 이용되어 미관측상태변수가 파라미터와 함께 통계적인 추론의 대상이 된다는 차이점이 있다.

연속시간 이자율 기간구조모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언 추론은 Frühwirth-Schnatter and Geyer(1998), Mikkelsen(2002), Lamouroux and Whittle(2002), Sanford and Martin(2005), Sögner(2009) 등에서 제시되었다. MCMC를 이용한 베이지언 추론은 추정하고자 하는 모형설정에 따라서 효율적인 사후표본추출을 위한 알고리즘이 결정될 뿐만 아니라

주변확률밀도함수 $p(y|\cdot, \theta)$ 으로부터 y 를 생성하는 것이 된다. 이와 같이 결합확률밀도함수로부터 표본을 생성하고 관심의 대상이 아닌 표본을 버림으로써 관심의 대상이 되는 변수에 대한 주변확률밀도함수로부터의 표본을 얻는 방법을 주변화(marginalization)라고 부른다.

동일한 모형설정이라고 하더라도 연구자마다 서로 상이한 알고리즘을 선택할 수 있다. 따라서 여기서의 논의는 이자율 기간구조모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언 추론의 구체적인 사후표본추출을 위한 알고리즘에 대해서는 논의하지 않고 추론과정에서 일반적으로 고려되어야 사항에 한정하여 살펴보고자 한다. ATSM과 QTSM은 베이지언 추론을 위한 파라미터와 미관측상태변수의 사후조건부확률밀도함수 유도과정이 크게 다르지 않으므로 일반적으로 많이 이용되는 무이표채수익률에 대한 ATSM을 중심으로 이자율 기간구조모형에 대한 베이지언 추론을 살펴보기로 한다. 논의의 편의를 위하여 식 (3-11)의 일반적인 ATSM을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\begin{cases} y_t(\tau) = a(\tau) + b(\tau)X_t + \epsilon_t(\tau) \quad , \quad \epsilon_t \sim IN(0, H) \\ dX_t = K(\Theta - X_t)dt + \Sigma \sqrt{S_t} dW_t \end{cases} \quad (3-34)$$

$$H = \text{diag}(\sigma_\epsilon^2(\tau_1), \sigma_\epsilon^2(\tau_2), \dots, \sigma_\epsilon^2(\tau_N))$$

관측방정식의 오차항 $\epsilon_t(\tau)$ 의 공분산행렬 H 는 $\{\sigma_\epsilon^2(\tau_j), j = 1, \dots, N\}$ 를 대각원소로 하는 $(N \times N)$ 대각행렬이다. 이를 제외한 나머지 설정은 제 2장에서 살펴본 DS의 ATSM의 설정과 동일하다. 식 (3-34)의 ATSM에서 추정해야할 파라미터는 $\{K, \Theta, \Sigma, \alpha, B, \lambda, \delta_0, \delta_X, H\}$ 이다. 이 파라미터들은 P 측도 하의 상태변수의 동학과 관련된 파라미터와 Q 측도 하의 가격결정과 관련한 파라미터 그리고 가격결정오류와 관련된 파라미터로 다음과 같이 구분될 수 있다.

$$\{\psi_P = (K, \Theta, \Sigma, \alpha, B), \quad \psi_Q = (\lambda, \delta_0, \delta_X), \quad H\}$$

식 (3-34)의 ATSM에 대한 베이지언 추론은 모형의 우도함수와 함께 이들 파라미터에 대한 사전확률밀도함수(prior probability density function)

가 필요하다. 논의의 편의를 위해 위와 같이 구분되는 파라미터의 사전 확률밀도함수를 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$p(\psi_P, \psi_Q, H) = p(\psi_P) p(\psi_Q) p(H) \quad (3-35)$$

파라미터에 대한 사전확률밀도함수를 설정하면 베이지언 추론을 위한 ATSM 모형설정이 완결된다. 이제 MCMC를 이용한 베이지언 추론과정을 살펴보기로 한다.

식 (3-34)의 ATSM과 식 (3-35)의 사전확률밀도함수 설정 하에서 베이지정리를 이용하면 다음과 같은 파라미터와 미관측상태변수에 대한 사후조건부확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$\pi(\psi_P, \psi_Q, H, X | Y) \propto p(Y | X, \psi_P, \psi_Q, H) p(X | \psi_P) p(\psi_P) p(\psi_Q) p(H) \quad (3-36)$$

여기서 $Y = (y_1(\tau), \dots, y_T(\tau))$, $X = (X_1, \dots, X_T)$ 이며, $p(Y | X, \psi_P, \psi_Q, H)$ 는 관측치의 우도함수를 나타낸다. 그리고 $p(X | \psi_P)$ 는 미관측상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 나타낸다. 이는 다음과 같다.

$$p(X | \psi_P) = \left[\prod_{t=2}^T p(X_t | X_{t-1}, \psi_P) \right] p(X_1 | \psi_P) \quad (3-37)$$

일반적인 연속시간 ATSM에서 미관측상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수의 해석적인 형태는 얻기 어렵다. 그러나 식 (3-36)에서 알 수 있듯이 베이지언 추론에서는 사후표본추출을 위해서 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수의 해석적인 형태를 필요로 한다. 이러한 이유로 대부분의 기존 이차율 기간구조모형에 대한 베이지언 추론은 식 (3-37)의 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수의 해석적인 형태를 얻을 수 있는

모형을 중심으로 이루어졌다. Frühwirth-Schnatter and Geyer(1998), Lamouroux and Whitte(2002), Sanford and Martin(2005)은 단일요인 CIR모형 또는 독립적인 CIR 과정을 따르는 다요인 모형, Mikkelsen (2002)는 Ornstein-Uhlenbeck 과정을 따르는 단일요인 모형, Sögner (2009)는 $A_0(n)$ ATSM에 대한 베이지언 추론 알고리즘을 제시한 바 있다. 그러나 상태변수의 SDE에 제약을 부과했을 때 해석적인 이산시간 전이확률밀도함수를 얻을 수 있거나 제약을 부과하지 않더라도 이를 근사할 수 있는 경우가 있다. 예를 들면, 특별한 제약을 부과하지 않더라도 $A_1(n)$ ATSM의 경우에는 이산시간 전이확률밀도함수에 대한 근사가 용이하며, $A_m(n)$ ATSM의 경우에도 m 개의 변동성요인들이 서로 독립이라고 가정하여 이를 쉽게 근사할 수 있다²⁶⁾. QTSM의 경우에는 상태변수가 가우시언 선형과정을 따르는 것으로 설정되므로 해석적인 형태의 이산시간 전이확률밀도함수를 얻을 수 있으므로 문제가 되지 않는다.

식 (3-36)의 사후조건부확률밀도함수로부터 사후표본추출을 위한 파라미터와 미관측상태변수의 사후조건부확률밀도함수를 다음과 같은 유도할 수 있다.

$$\pi(X|\psi_P, \psi_Q, H, Y) \propto p(Y|X, \psi_P, \psi_Q, H)p(X|\psi_P) \quad (3-38a)$$

$$\pi(\psi_P|\psi_Q, H, X, Y) \propto p(Y|X, \psi_P, \psi_Q, H)p(X|\psi_P)p(\psi_P) \quad (3-38b)$$

$$\pi(\psi_Q|\psi_P, H, X, Y) \propto p(Y|X, \psi_P, \psi_Q, H)p(\psi_Q) \quad (3-38c)$$

$$\pi(H|\psi_P, \psi_Q, X, Y) \propto p(Y|X, \psi_P, \psi_Q, H)p(H) \quad (3-38d)$$

26) 이를 근사하는 방법으로는 Duffie et al.(2003)의 역변환을 이용한 근사최우추정에서 제시된 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 근사하는 방법이 이용될 수 있을 것이다. 그 외에도 제 3장 3절의 SML추정법에 관한 논의에서 언급된 기존 연구 방법들이 이용될 수 있다.

식 (3-38a)는 미관측상태변수의 사후조건부확률밀도함수를 나타내는데 $A_0(n)$ ATSM을 제외하면 $\pi(X|\psi_P, \psi_Q, H, Y)$ 로부터 직접표본을 추출하는 것이 불가능하므로 일반적으로 MH알고리즘(Metropolis-Hastings algorithm)²⁷⁾을 이용하여 표본을 추출하는 방법이 이용되고 있다. $A_0(n)$ ATSM의 경우에는 식 (3-32)의 이자율 기간구조모형이 선형정규상태공간모형이 되므로 Carter and Kohn(1994), Frühwirth-Schnatter(1994)의 FFBS알고리즘(forward filtering backward sampling)이나 De Jong and Shephard(1995), Durbin and Koopman(2002)의 시뮬레이션스무더(simulation smoother)을 이용하여 효율적으로 표본을 추출할 수 있다.

식 (3-38b)는 미관측상태변수의 확률과정에 포함된 파라미터 $\psi_P = (K, \Theta, \Sigma, \alpha, B)$ 의 사후조건부확률밀도함수를 나타낸다. 이자율 기간구조모형에서 ψ_P 파라미터들은 식 (2-44)의 Ricatti ODE로 구성되는 무차익거래(absence of arbitrage) 제약을 충족하여야 한다. 따라서 $\pi(\psi_P|\psi_Q, H, X, Y)$ 으로부터 ψ_P 파라미터들을 직접 표본추출하는 것이 불가능하므로 MH알고리즘이 이용된다. 식 (3-38c)는 Q 측도 하의 가격결정과 관련한 파라미터 $\psi_Q = (\lambda, \delta_0, \delta_X)$ 의 사후조건부확률밀도함수를 나타낸다. ψ_P 와 마찬가지로 ψ_Q 파라미터들 역시 식 (2-54)의 Ricatti ODE로 설정된 무차익거래 제약을 충족해야하므로 $\pi(\psi_Q|\psi_P, H, X, Y)$ 으로부터 직접 표본추출이 불가능하여 MH알고리즘을 통해 표본을 추출하여야 한다. 식 (3-38d)는 오차항의 공분산행렬을 나타내는데, 사전확률밀도함수 $p(H)$ 는 일반적으로 역위샤트분포(inverse Wishart distribution)로 설정되므로 사후조건부확률밀도함수 역시 역위샤트분포가 된다. 따라서 오차항의 공분산 H 는 깁스샘플링알고리즘을 이용하여 직접 표본추출하는

27) 사후조건부확률밀도함수로부터 직접 표본을 추출하는 것이 가능할 경우에는 깁스샘플링알고리즘(Gibbs sampling algorithm)이 이용되지만 직접 표본추출이 불가능할 경우에는 MH알고리즘이 주로 이용된다. MH알고리즘에 대한 자세한 논의는 Chib and Greenberg(1995)를 참조할 수 있다.

것이 가능하다. 식 (3-34)의 ATSM에서는 오차항들이 서로 독립인 것으로 설정되어 $\{p(\sigma^2(\tau_i))\}_{i=1}^N$ 은 역감마분포(inverse-gamma distribution)²⁸⁾로 된다. 따라서 사후조건부확률밀도함수 역시 역감마분포가 되므로 이로부터 직접 표본추출이 가능하다. 식 (3-38a)~식 (3-38d)의 사후조건부확률밀도함수로부터 표본을 추출하는 과정을 충분히 반복한 후, 초기의 일정 부분(burn-in sample)을 버리고 남은 나머지 사후표본을 이용하여 파라미터와 미관측상태변수에 대한 추론을 할 수 있다²⁹⁾.

이상에서 살펴본 것과 같이 이자율 기간구조모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언 추론은 오차항의 공분산행렬을 제외한 파라미터들과 미관측상태변수를 사후조건부확률밀도함수로부터 직접 사후표본을 추출하는 것이 불가능하므로 MH알고리즘이 일반적으로 이용된다. 따라서 MH알고리즘의 후보생성확률밀도함수 선택이 알고리즘의 수렴속도와 표본추출의 효율성에 결정적으로 영향을 미치게 된다. 또한 $A_0(n)$ ATSM과 같이 오일러이산화를 통해 이산모형으로 변환된 모형과 같은 예외적인 경우를 제외하면, 미관측상태변수 추출과정에서 이산시간 전이확률밀도함수로부터 직접 표본을 추출하는 방식이 아니라, Elerian, Chib and Shephard(2001), Eraker(2001) 등에서 제시된 방법 즉, 연속된 두 시점을 더 작은 구간으로 분할한 후 분할된 소구간에서 표본을 생성하는 방식으로 상태변수의 연속시간 사후조건부확률밀도함수로부터 표본을 추출하므로 표본추출에 매우 많은 시간이 소요되는 경향이 있다. 이러한 특성으로 인하여 MCMC를 이용한 베이지언 추론은 연속시간 이자율 기간구조

28) 자유도 파라미터 $\alpha > 0$, 스케일 파라미터 $\beta > 0$ 를 가지는 역감마분포, $x \sim IG(\alpha, \beta)$ 의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)$$

29) 베이지언 추론과 관련된 일반적인 논의는 Robert and Casella(2004), Geweke(2005) 등을 참조할 수 있다.

모형보다는 이산시간 기간구조 모형의 추정에 더 활발하게 이용되고 있다. 최근 이자율 기간구조 모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언 추론은 이산시간모형으로 설정되는 거시금융 기간구조 모형(Macro-Finance term structure model)연구에서 활발하게 이용되고 있다, Ang, Dong and Piazzesi(2007), Chib and Ergashev(2009) 등은 이산시간 ATSM 추정에, Ang, Bekaert and Wei(2008)은 QTSM추정에 MCMC를 이용한 베이지언 추론을 이용하고 있다.

제 4 장 확률변동성 이자율모형 설정과 베이지언추론

제 1 절 단기이자율 확률변동성모형

이자율 기간구조모형에서 조건부확률변동성의 수준효과와 관련된 연구는 주로 단기이자율모형을 위주로 이루어졌다³⁰⁾. Chan et al.(1992), Dahlquist(1996)은 연속시간 단기이자율모형에 대한 GMM추정을 통하여 조건부확률변동성의 수준효과를 추정하였다.

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t \quad (4-1)$$

식 (4-1)의 단기이자율 확률과정에서 변동성항 r_t^γ 는 조건부확률변동성

30) 연속시간 단기이자율 모형설정은 이자율 기간구조모형 설정과 밀접한 관련을 가진다. 이러한 관련성은 DS의 $A_m(n)$ ATSM 설정에서 보다 확실하게 나타난다. DS의 $A_m(n)$ ATSM은 m 개의 상태변수가 단일요인 CIR모형에서와 같은 Feller 제공근 과정을 따르고 나머지 $(n-m)$ 개의 상태변수가 단일요인 Vasicek모형에서와 같이 Ornstein-Uhlenbeck 과정을 따르는 것으로 설정되어 있다. 이러한 이자율 기간구조모형 설정은 CIR모형과 Vasicek모형을 합성한 것임을 알 수 있다.

수준효과의 크기를 설명하기 위한 것이다. [표 4-1]에서 알 수 있듯이 $\gamma = 0$ 이면 Vasicek모형, $\gamma = 1/2$ 이면 CIR모형, $\gamma = 1$ 이면 Dothan(1978) 및 Brennan and Schwartz(1977)모형, 그리고 $\gamma = 3/2$ 이면 ISRM과 같음을 알 수 있다. [표 4-1]에서 단기이자율이 상태변수인 경우 DK모형의 변동성향은 단기이자율의 선형함수 제곱근으로 설정되어 있고, 추세항과 변동성향이 앞서 살펴본 ATSM과도 밀접한 관련이 있음을 알 수 있다. AG모형을 제외한 다른 모형들에서 추세항이 모두 단기이자율의 선형함수이므로 평균회귀성향이 상수로 일정하며, 변동성향은 단기이자율에 대한 의존정도가 모두 다르게 설정되어 있다. 이와 같이 단기이자율이 상태변수인 모형들은 일반적인 이자율 기간구조모형의 특별한 형태로 볼 수 있다. 이러한 모형설정 특성과 함께, 앞서 살펴본 대표적인 이자율 기간구조모형이 단기이자율과 상태변수들 간의 관계를 중심으로 설정되어 있다는 것은 단기이자율의 확률과정에 대한 분석을 통해 이자율 기간구조모형 선택에 필요한 정보를 얻을 수 있음을 의미한다³¹⁾.

단기이자율과정의 추정에 관한 주요 선행연구 결과는 다음과 같다. Chan et al.(1992)은 1개월만기 미국재무성채권수익률에 대한 월간자료를 이용하여 식 (4-1)에 대한 GMM추정을 하였고 $\gamma = 1.5$ 의 추정치를 제시하였다. 그러나 GMM추정에서 단기이자율이 단위근에 가까운 지속성을 가지고 있다는 점과 파라미터 σ 와 γ 를 식별하는 것이 용이하지 않다는 점은 약점으로 지적된다. 또한 식 (4-1)은 1979년 10월에서 1982년 9월까지 분석기간의 통화정책변화를 반영할 수 없다는 문제점이 있다. Bliss and Smith(1998)는 이러한 통화정책변화에 따른 구조단절(structural break)를 고려하면 $\gamma = 0.95$ 의 결과가 얻어진다고 주장하였다. Conley et al.(1997)은 연방기금금리(federal fund rate) 자료를 이용한 실증분석에서 CEV(constant elasticity of variance) 확률과정에서 γ 추정치가 1.5에서 2의 범위 값을

31) Brigo and Mercurio(2007)은 ATSM, QTSM 등의 이자율 기간구조모형이 단기이자율과 상태변수들간의 관계를 중심으로 설정되어 있으므로 이들 모형을 단기이자율기반-이자율 기간구조모형(short rate based interest rate term structure model)이라고도 하였다.

가지는 것으로 추정하였다. 이와 유사한 결과는 Ait-Sahalia(1996)와 Stanton(1997)의 비모수적인 추정에서도 제시되었다. Ait-Sahalia(1996)는 1973년 6월 1일부터 1995년 2월 25일까지 기간의 7일만기 유로달러이자율 일간자료에 대한 실증분석에서 $\gamma=1.04$ 의 추정결과를 제시하였으며, Stanton(1997)은 1965년에서 1995년까지 3개월만기 미국재무부채권수익률의 일간자료에 대한 비모수적 추정에서 γ 가 1.5에서 2의 범위값의 가진다고 제시하였다. Jones(2003)는 Ait-Sahalia(1996)의 자료에 대한 MCMC를 이용한 베이지언추론을 통해서 $\gamma=1.36$ 의 사후평균을 가진다는 것을 보였다

[표 4-1] 단기이자율 확률과정

모형	확률과정
Vasicek	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$
CIR	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$
Brennan-Schwartz	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t dW_t$
CKLS	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$
DK	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{\alpha + \beta r_t}dW_t$
AG	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)r_t dt + \sigma r_t^{1.5}dW_t$

Ball and Torous(1999)는 식 (4-1)를 확장하여 다음과 같은 확률변동성을 포함하는 이산시간 단기이자율모형에 대한 QML(quasi maximum likelihood) 추정결과를 제시하였다.

$$\begin{cases} r_t = a + b r_{t-1} + \sigma_{t-1}^\gamma \epsilon_{1t} & , \quad \epsilon_{1t} \sim i.i.d N(0, 1) \\ \log \sigma_t^2 - \mu = \beta (\log \sigma_{t-1}^2 - \mu) + \xi \epsilon_{2t} & , \quad \epsilon_{2t} \sim i.i.d N(0, 1) \end{cases} \quad (4-2)$$

여기서 $E[\epsilon_{1t} \epsilon_{2s}] = 0$, $\forall t, s \in \{1, \dots, T\}$ 이다. Ball and Torous(1999)는 Chan et al.(1992) 에서와 같이 1964년 6월부터 1989년 12월까지 기간의 1개월만기 미국재무부채권수익률 월간자료를 분석하여 $\gamma = 0.651$ 의 추정치를 제시하였다. Ball and Torous(1999)는 식 (4-2)의 모형을 추정하기 위해 먼저 OLS를 적용하여 단기이자율 방정식을 추정하여 얻은 잔차에 대해서 Harvey et al.(1994)에서와 같은 칼만필터를 적용한 QML추정을 수행하였다.

이와 유사하게 Smith(2002)는 식 (4-2)의 단기이자율 평균을 제거하고 난 후 얻은 잔차의 제곱을 로그변환한 다음, 이에 대해서 식 (4-3)과 같은 전이확률이 상수인 마르코프 국면전환 확률변동성모형에 대한 QML 추정결과를 제시하였다.

$$\begin{cases} y_t = x_t + 2\gamma \log r_{t-1} - 1.2704 + \xi_t \\ x_t = \omega(S_t) + \phi x_{t-1} + \eta_t \\ \Pr[S_t = j | S_{t-1} = i] = p_{ij} \end{cases} \quad (4-3)$$

여기서 $y_t = \log(\Delta r_t - a - b r_{t-1})^2$, $\xi_t \sim i.i.d N(0, \pi^2/2)$, $\eta_t \sim i.i.d N(0, \sigma_\eta^2)$, $E[\xi_t \eta_s] = 0$, $\forall t, s \in \{1, \dots, T\}$ 이다. Smith(2002)는 1964년 6월부터 1996년 12월까지 기간의 30일만기 미국재무부채권수익률의 월간자료에 대한 분석에서 식 (4-3)의 두 번째 확률변동성 식에서 $\phi = 0$, $\eta_t = 0$ 의 제약을 부과한 경우 $\gamma = 0.92$ 의 추정결과를, 제약을 부과하지 않는 경우 $\gamma = 1.0205$ 의 결과를 얻었다.

Andersen and Lund(1997, 이하 AL)는 다음과 같은 확률변동성을 포함하는 연속시간 단기이자율모형에 대한 EMM추정결과를 제시하였다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\mu - r_t) dt + \sigma_t r_t^\gamma dW_{1t}, & \gamma > 0 \\ d \log \sigma_t^2 = \kappa_2 (\alpha - \log \sigma_t^2) dt + \xi dW_{2t} \end{cases} \quad (4-4)$$

여기서 W_{1t} 와 W_{2t} 는 서로 독립인 표준위너과정이다. AL은 EMM추정을 위한 보조모형으로 Level-EGARCH(1,1)모형의 조건부분산 설정을 따르는 SNP모형(semi-nonparametric auxiliary model)을 이용하고 있다. AL은 1954년 1월부터 1995년 4월 까지 기간의 3개월만기 미국재무부채권수익률 주간자료를 이용하여 식 (4-4)를 추정한 결과 $\gamma = 0.544$ 의 추정치를 제시하였다. 그리고 Eraker(2001)는 1954년 1월부터 1997년 10월까지 기간의 3개월만기 미국재무부채권수익률 주간자료를 이용한 분석에서 자료확장의 원리(data augmentation)와 MCMC를 이용한 사후표본추출방법을 통해 식 (4-4)에 대한 베이지언추론 결과 γ 의 사후표본평균이 0.76임을 보여준다. Eraker(2001)는 오일러이산화에 따른 이산시간 전이확률밀도함수의 정규 분포근사 정확성을 제고시키기 위해 연속적인 자료의 두 관측시점 사이의 미관측변동성과 채권수익률자료를 사후표본추출하는 방법을 이용하였다. 주간이하 빈도자료의 경우 자료확장의 원리에 따른 추가적인 자료의 표본추출빈도에 추론결과가 크게 영향을 받지 않는다는 것을 보여준다.

식 (4-4)는 단기이자율과 로그확률변동성을 상태변수로 하는 2요인 이자율모형의 상태방정식이다. 그러나 상태변수($r_t, \log \sigma_t^2$)가 서로 독립이므로 실제 시장에서 관측되는 이자율기간구조가 상관관계를 가질 경우 이를 충분히 설명하지 못한다. 그러므로 식 (4-4)는 상태변수들 사이의 상관관계를 허용하도록 확장될 수 있다. 이 경우에 이자율 기간구조모형이 상관관계가 없다고 가정하는 경우보다 더 충분한 현실 적합성을 가질 수 있다. 아래에서는 이자율의 확률변동성과 수준효과를 잘 설명할 수 있는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 설정하고 이에 대한 MCMC를 이용한 베이지언추론 알고리즘과 추론결과를 제시한다. 이러한 분석을 통해

서 수준효과를 포함하는 확률변동성의 특성을 설명하기 위한 이자율 기간구조모형 설정 유효성을 살펴볼 수 있다.

제 2 절 수준효과를 포함하는 일반적인 모형

식 (4-4)를 확장하여 단기이자율과 로그조건부분산의 상관관계를 허용하는 연속시간 단기이자율 확률변동성모형을 설정한다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\theta_1 - r_t) dt + \exp\left(\frac{Z_t}{2}\right) r_t^\gamma dW_{1t} \\ dZ_t = \kappa_2 (\theta_2 - Z_t) dt + \sigma_Z dW_{2t} \\ E_t [dW_{1t} \cdot dW_{2t}] = \rho dt \end{cases} \quad (4-5)$$

여기서 Z_t 는 단기이자율의 로그확률변동성을 뜻한다. 식 (4-5)의 연속시간모형에 대하여 오일러이산화(Euler discretization)를 적용하여 식 (4-6)의 이산시간모형으로 쓸 수 있다³²⁾.

$$\begin{cases} r_{t+\Delta t} - r_t = \kappa_1 (\theta_1 - r_t) \Delta t + \exp\left(\frac{Z_t}{2}\right) r_t^\gamma [W_{1t+\Delta t} - W_{1t}] \\ Z_{t+\Delta t} - Z_t = \kappa_2 (\theta_2 - Z_t) \Delta t + \sigma_Z [W_{2t+\Delta t} - W_{2t}] \\ E([W_{1t+\Delta t} - W_{1t}][W_{2t+\Delta t} - W_{2t}]) = \rho \Delta t \end{cases} \quad (4-6)$$

32) 연속시간모형에 오일러이산화를 적용하여 얻은 이산시간모형에 대한 추론은 이산화편의(discretization bias)의 문제를 유발할 수 있다. 그러나 주간이상의 고빈도자료(high frequency data)를 이용하는 경우 이산화편의가 일반적으로 심각하지 않음이 알려져 있다. Elerian et al.(2001), Eraker(2001), Jones(2003), 그리고 Collin-Dufresne et al.(2009)는 주간 또는 일간자료를 이용한 연속시간모형에 대한 베이지언추론에서 오일러이산화와 자료확장의 원리에 따른 추가적인 고빈자료의 생성을 통해서 얻은 결과와 그렇지 않은 결과 사이에 차이가 거의 존재하지 않음을 보여준다.

여기서 Δt 는 두 시점사이의 간격을 나타낸다. 식 (4-6)은 실증분석을 위하여 다음의 이산시간모형으로 나타 낼 수 있다³³⁾.

$$\begin{cases} \Delta r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + r_{t-1}^\gamma \sqrt{z_{t-1}} \epsilon_t \\ \log z_t = \mu + \phi \log z_{t-1} + \eta_t \\ \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \sigma_\eta \\ \rho \sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \end{cases} \quad (4-7)$$

여기서 $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$, $\log z_t = Z_t + \log \Delta t$ 이다. 식 (4-6)과 비교하면 $a_0 = \kappa_1 \theta_1 \Delta t$, $a_1 = -\kappa_1 \Delta t$, $\mu = \kappa_2 \Delta t (\theta_2 + \log \Delta t)$, $\phi = 1 - \kappa_2 \Delta t$, $\sigma_\eta = \sigma_Z \sqrt{\Delta t}$ 의 관계를 확인할 수 있다. 일반적으로 식 (4-7)과 같이 조 건부표준편차에 단기이자율 수준효과를 포함하는 모형에 대한 최우추정에서 파라미터 γ 와 확률변동성 방정식에 포함된 파라미터들 $\{\mu, \phi, \sigma_\eta, \rho\}$ 에 대한 식별이 쉽지 않다. 게다가 단기이자율의 평균회귀성향이 비교적 약한 단위근(unit root)을 가지는 확률과정일수록 γ 와 $\{\mu, \phi, \sigma_\eta, \rho\}$ 의 식별 문제는 더욱 어려워진다. 대부분의 기존 연구에서는 파라미터 식별의 문제를 해결하기 위해 수준효과 파라미터 γ 에 특정 값으로 제약을 가하여 확률변동성 방정식에 포함된 파라미터들을 식별한다. 그러나 식 (4-7)에서는 수준효과의 크기를 나타내는 파라미터 γ 를 추정하여야 하므로 이러한 제약을 부과할 수 없다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 Ball and

33) 이산시간모형은 식 (4-6)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있음을 이용한 것이다.

$$\begin{cases} r_{t+\Delta t} - r_t = \kappa_1 \theta_1 \Delta t - (\kappa_1 \Delta t) r_t + \exp\left(\frac{Z_t^*}{2}\right) r_t^\gamma \epsilon_{1t} & , \quad \epsilon_{1t} \sim N(0, 1) \\ Z_{t+\Delta t}^* - Z_t^* = \kappa_2 \Delta t (\theta_2 + \log \Delta t) - (\kappa_2 \Delta t) Z_t^* + \sigma_Z \sqrt{\Delta t} \epsilon_{2t}, & \epsilon_{2t} \sim N(0, 1) \\ E(\epsilon_{1t} \epsilon_{2t}) = \rho \end{cases}$$

여기에서 $Z_t^* = Z_t + \log \Delta t$ 이다.

Torous(1999)는 기하평균(geometric mean)을 이용하여 자료의 스케일을 조정하는 분석하는 방법을 제안하였다. 이에 따르면 기하평균을 이용한 스케일 조정은 첨도와 왜도 같은 분포의 특성을 변화시키지 않으면서 식 (4-7)과 같은 수준효과를 포함하는 확률변동성모형의 파라미터들에 대한 식별을 용이하게 하는 장점이 있다. 또한, 목적함수에 대한 최적화를 통해서 모든 파라미터를 한꺼번에 추정하는 GMM추정법이나 최우추정법과는 달리 MCMC를 이용한 베이지언추론에서는 수준효과를 나타내는 γ 와 변동성방정식에 포함된 $\{\mu, \phi, \sigma_\eta, \rho\}$ 를 서로 다른 블록에서 순차적으로 사후표본추출하는 방법이 이용되므로 식별의 문제가 어느 정도 완화될 수 있다. 본 연구에서는 Ball and Torous(1990)의 기하평균을 이용한 스케일 조정 방법과 식별이 용이하지 않은 파라미터를 서로 다른 블록에서 표본추출하는 방법으로 식별의 문제를 해결하였다. 단기이자율이 단위근에 가까운 지속성을 가진다는 것은 식 (4-7)에 GMM추정법이나 최우추정법을 이용하여 얻은 추정치에 대해 대표본이론에 근거한 추론을 어렵게 한다. 그러나 본 연구에서 이용할 베이지언추론은 기본적으로 유한소표본에 대한 추론이므로 GMM추정법이나 최우추정법에서 발생하는 단기이자율의 지속성에 따른 추론의 문제점을 완화하거나 해결할 수 있다. 아래에서 식 (4-7)을 추정하기 위한 새로운 MCMC 베이지언추론 알고리즘을 제시한다. 추론을 위해 먼저 사전확률밀도함수를 설정하고, 분석모형의 우도함수와 사전확률밀도함수를 결합하여 얻은 조건부 사후확률밀도함수를 통해 표본을 추출한다.

제 3 절 사전확률밀도함수

식 (4-7)에 대해 MCMC를 이용한 베이지언추론을 하기 위해서 먼저 모형의 파라미터들 $\{a_0, a_1, \gamma, \mu, \phi, \sigma_\eta, \rho\}$ 에 대한 사전확률밀도함수(prior probability density function)를 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{cases}
p(a_0, a_1) \sim N(\underline{a}, \underline{A}) I[-2 < a_1 < 0] \\
p(\gamma) \sim N(\underline{g}, \underline{G}) I[\gamma \geq 0] \\
p(\mu, \phi) \sim N(b_0, B_0) I[|\phi| < 1] \\
p(\Sigma) \sim IW_p(n_0, V_0^{-1}) \propto |\Sigma|^{-\frac{n_0+p+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} V_0\right) I[\sigma_{11} = 1], p=2
\end{cases}
\quad (4-8)$$

여기서 $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}$ 이며, $I[\cdot]$ 는 인디케이터함수, $N(\cdot, \cdot)$ 는 정규분포를 그리고 IW_p 는 p 차원의 역위샤트분포(inverse Wishart distribution)를 나타낸다. 식 (4-8)의 사전확률밀도함수에서 파라미터 $\{a_0, a_1\}$ 벡터는 평균과 분산이 각각 \underline{a} 와 \underline{A} 인 이변량정규분포(bivariate normal distribution)를 따른다. 이때 단기이자율이 단위근을 가지지 않도록 하기위하여 파라미터 a_1 에 $-2 < a_1 < 0$ 의 제약을 부과하였다. 수준효과를 나타내는 파라미터 γ 는 평균과 분산이 각각 \underline{g} 와 \underline{G} 인 정규분포를 따르는 것으로 설정하고, 비음(non-negativity)의 제약을 부과하였다. 확률변동성 방정식에 포함된 파라미터 $\{\mu, \phi\}$ 는 평균과 분산이 각각 b_0 와 B_0 인 정규분포를 따른다고 가정하고 지속성 파라미터 ϕ 에는 확률변동성이 불안정시계열이 되지 않게 $|\phi| < 1$ 의 제약을 부과하였다. 식 (4-7)의 $\{\rho, \sigma_\eta\}$ 에 대해서는 사전확률밀도함수를 각각 직접 설정하지 않고 이들을 포함하고 있는 오차항벡터 $(\epsilon_t, \eta_t)'$ 의 공분산행렬 Σ 에 대한 하나의 사전확률밀도함수를 설정하였다. 즉, Σ 를 분산에 1의 제약이 가해진 공분산행렬로 보고 제약하의 사전확률밀도함수로 정의한 것이다. 이러한 이유는 본 연구에서 공분산행렬의 조건부 사후확률분포인 역위샤트분포로부터 제약하의 공분산행렬을 직접 표본추출하는 방법을 사용함으로써 사후표본추출의 효율성을 높이하고자 하기 때문이다³⁴⁾.

제 4 절 조건부 사후확률밀도함수

베이지언추론을 위해서는 식 (4-7) 모형의 우도함수(likelihood function)와 식 (4-8)의 사전확률밀도함수를 결합하여 파라미터에 대한 조건부 사후확률밀도함수(joint conditional posterior probability density function)를 얻을 수 있어야 한다. 식 (4-7)에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L(\boldsymbol{\psi} | \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T) = \prod_{t=1}^T p(\Delta r_t, z_t | r_{t-1}, z_{t-1}, \boldsymbol{\psi}) \quad (4-9)$$

여기서 $\boldsymbol{\psi} = \{a_0, a_1, \gamma, \mu, \phi, \Sigma\}$ 이다. 식 (4-9)의 우도함수와 식 (4-8)의 사전확률밀도함수를 결합하여 베이즈정리(Bayes theorem)를 적용하면 다음과 같은 조건부 사후확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$\pi(\boldsymbol{\psi}, \{z_t\}_{t=1}^T | \{\Delta r_t\}_{t=1}^T) \propto L(\boldsymbol{\psi} | \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T) p(a_0, a_1) p(\gamma) p(\mu, \phi) p(\Sigma) \quad (4-10)$$

식 (4-10)으로부터 식 (4-7)의 파라미터 $\boldsymbol{\psi}$ 와 미관측상태변수인 로그변동성 $\{z_t\}_{t=1}^T$ 에 대한 조건부 사후확률밀도함수를 유도할 수 있다. 이때 $\boldsymbol{\psi}$ 와 $\{z_t\}_{t=1}^T$ 에 대한 사후표본추출을 위한 표본추출블록을 다음의 [표 4-2]와 같이 설정할 수 있다. 여기서 $\boldsymbol{\Theta} = \{\mu, \phi, \sigma_\eta, \rho\}$ 이다.

34) $\{\rho, \sigma_\eta\}$ 의 각각의 파라미터에 대한 사전확률밀도함수를 직접 설정하지 않고 이들을 포함하는 제약하의 공분산행렬을 설정하는 것은 이들의 한꺼번에 표본추출하는 방법으로 사후표본추출의 효율성을 높이는데 목적이 있다.

[표 4-2] 표본추출블록

$$[i] \quad \pi(a_0, a_1, \gamma | \Theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T)$$

$$[i-1] \quad \pi(a_0, a_1 | \gamma, \Theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T)$$

$$[i-2] \quad \pi(\gamma | a_0, a_1, \Theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T)$$

$$[ii] \quad \pi(\Theta, \{z_t\}_{t=1}^T | a_0, a_1, \gamma, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T)$$

$$[ii-1] \quad \pi(\{z_t\}_{t=1}^T | a_0, a_1, \gamma, \Theta, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T)$$

$$[ii-2] \quad \pi(\Theta | a_0, a_1, \gamma, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T, \{z_t\}_{t=1}^T)$$

먼저, 블록 [i]은 미관측상태변수인 확률변동성과 이자율이 주어진 경우 단기이자율 방정식에 포함된 파라미터들을 표본추출하는 것이다. 이를 다시 분할하여 단기이자율 방정식의 계수들과 수준효과 파라미터 γ 블록으로 나눌 수 있다. 주어진 파라미터 γ 와 확률변동성을 이용하여 단기이자율 방정식을 다음과 같이 GLS변환을 하면 [i-1] 블록의 조건부 사후확률 밀도함수는 y^* 가 종속변수이고 X^* 가 설명변수인 선형회귀방정식의 계수에 대한 조건부 사후확률밀도함수로 볼 수 있다.

$$y^* = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Delta r_t \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & r_{t-1} \\ r_{t-1}^\gamma \sqrt{z_{t-1}} & r_{t-1}^\gamma \sqrt{z_{t-1}} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

이를 이용하면 $\pi(a_0, a_1 | \gamma, \Theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T)$ 는 다음의 평균과 분산을 가지는 정규분포가 된다.

$$\begin{aligned}\tilde{a} &\sim N[\bar{a}, \bar{A}] I[-2 < a_1 < 0] \\ \bar{a} &= \bar{A} \left(\underline{a} \underline{A}^{-1} + (X^{*'} y^*) \right), \quad \bar{A} = \left(\underline{A}^{-1} + (X^{*'} X^*)^{-1} \right)^{-1}\end{aligned}\quad (4-11)$$

식 (4-11)과 같은 제약하의 정규분포를 따르는 조건부 사후확률밀도함수로부터 표본을 추출하는 경우 기각표본추출법(rejection sampling) 또는 Geweke(1991)³⁵⁾의 방법을 이용할 수 있다.

[i-2]블록의 조건부 사후확률밀도함수로부터 직접 γ 를 표본추출하는 것이 가능하지 않다. 따라서 $\pi(\gamma | a_0, a_1, \Theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T)$ 에 대해 라플라스 근사법(Laplace approximation)을 이용하여 근사한 후, 표본추출을 위한 후보생성확률밀도함수(proposal probability density function) $q(\gamma)$ 로 근사된 조건부 사후확률밀도함수를 사용하는 독립 메트로폴리스-헤스팅스(independent Metropolis-Hastings, MH) 알고리즘을 이용할 수 있다. $\pi(\gamma | a_0, a_1, \Theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T)$ 에 대한 라플라스근사는 이에 대한 최우추정법을 적용하여 얻어지는 최우추정치 $\hat{\gamma}$ 와 정보행렬의 역행렬 $I(\hat{\gamma})^{-1}$ 를 평균과 분산으로 하는 정규분포로 근사하는 것이다. 독립 MH 알고리즘을 이용하는 경우 표본추출의 효율성을 높이기 위하여 Chib and Greenberg(1998)에서와 같이 맞춤후보생성확률밀도함수(tailored proposal probability density function)를 이용할 수 있다. 맞춤후보생성확률밀도함수를 구성하는 방법으로는 라플라스근사에서 얻은 최우추정치 $\hat{\gamma}$ 와 그 공분산행렬 $I(\hat{\gamma})^{-1}$ 을 각각 평균과 분산으로 하며, 자유도 ν 인 t 분포 $t(\hat{\gamma}, I(\hat{\gamma})^{-1}, \nu)$ 를 후보생성확률밀도함수 $q(\gamma)$ 로 하고, 이러한 t 분포의 자유도를 튜닝하는 방법이 이용된다. 이때 튜닝파라미터인 자유도 ν 는 일반적으로 10에서 20사이의 값으로 결정된다. γ 의 조건부 사후확률밀도함수로부터 표본을 추출하기 위해서 이러한 방법으로 $\nu = 10$ 으로 설정한 t 분포를 후보생성확률밀도함수로 이용하여 후보표본 γ^* 를 생성할 수 있다.

35) Geweke(1991)은 선형제약하의 다변량정규분포와 다변량 t 분포로부터 표본을 생성하는 방법을 제시하였다. 자세한 논의는 Geweke(1991)을 참고할 수 있다.

라플라스근사를 이용한 후보생성확률밀도함수 또는 맞춤후부생성확률밀도가 결정되면 MH 알고리즘의 표본채택확률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha_{MH}(\gamma^{(i-1)}, \gamma^*) = \min \left\{ 1, \frac{L(Y^{**} | \gamma^*) p(\gamma^*) q(\gamma^{(i-1)})}{L(Y^{**} | \gamma^{(i-1)}) p(\gamma^{(i-1)}) q(\gamma^*)} \right\} \quad (4-12)$$

여기서 $L(Y^{**} | \gamma^*) p(\gamma^*)$ 는 γ^* 에서 평가한 γ 의 조건부 사후확률밀도함수를 나타낸다. 이러한 조건부 사후확률밀도함수는 $\{a_0, a_1, \theta, \{z_t\}_{t=1}^T\}$ 이 주어진 경우 $\pi(\gamma | a_0, a_1, \theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T)$ 가 우도함수와 사전확률밀도함수의 곱으로 축약된다는 점을 이용한 것이다.

$$\pi(\gamma | a_0, a_1, \theta, \{\Delta r_t, z_t\}_{t=1}^T) \propto L(Y^{**} | \gamma) p(\gamma)$$

여기서 $Y^{**} = \{y_t^{**} = (\Delta r_t - a_0 - a_1 r_{t-1}) / \sqrt{z_{t-1}}\}_{t=1}^T$ 이다. 블록[ii]의 조건부 사후확률밀도함수로부터 미관측상태변수인 확률변동성 $\{z_t\}_{t=1}^T$ 와 파라미터 θ 를 표본추출하는 과정은 [ii-1]의 관측자료와 파라미터가 주어졌을 때 조건부사후확률밀도함수 $\pi(\{z_t\}_{t=1}^T | a_0, a_1, \gamma, \theta, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T)$ 로부터 미관측상태변수를 추출하는 과정과 [ii-2]의 관측자료와 미관측상태변수가 주어졌을 때 $\pi(\theta | a_0, a_1, \gamma, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T, \{z_t\}_{t=1}^T)$ 로부터 파라미터 θ 를 표본추출하는 과정으로 구성된다.

일반적으로 식 (4-7)과 같이 미관측상태변수를 포함하는 비선형 상태공간모형의 미관측상태변수를 한꺼번에 표본추출하는 것은 용이하지 않다. 오차항 ϵ_t 와 η_t 의 상관관계가 존재하지 않는 경우에는 Kim et al.(1998)에서와 같이 식 (4-7)을 선형상태공간모형으로 근사한 후, Carter and Kohn(1994), Frühwirth-Schnatter(1994)의 FFBS알고리즘(forward filtering backward sampling)이나 De Jong and Shephard(1995), Durbin and

Koopman(2002)에서 제시된 시뮬레이션스무더(simulation smoother)를 이용하여 한꺼번에 표본추출하는 것이 가능하다. 그러나 식 (4-7)은 오차항들 사이에 상관관계가 존재하므로 미관측상태변수를 한번에 하나씩 표본추출(single move sampling)할 수 있다. 이를 위해서 식 (4-10)의 결합 조건부 사후확률밀도함수로부터 다음과 같은 t 시점의 미관측상태변수 z_t 의 조건부 사후확률밀도함수의 확률커널(probability kernel)을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \pi(z_t | z_{t-1}, z_{t+1}, \Delta r_t, \Delta r_{t+1}, \psi) &\propto p(\Delta r_t, z_t | z_{t-1}, \psi) p(\Delta r_{t+1}, z_{t+1} | z_t, \psi) \\ &\propto z_t^{-\left(\frac{1}{2} + \sigma^{12} \frac{\tilde{y}_t}{\sqrt{z_{t-1}}}\right)} \times z_t^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^{11} \frac{\tilde{y}_{t+1}^2}{z_t} - \frac{1}{2} \frac{[\log z_t - \mu_t^*]^2}{\sigma^{*2}}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^{12} \frac{\tilde{y}_{t+1}}{\sqrt{z_t}} \eta_{t+1}\right) \end{aligned} \quad (4-13)$$

여기서 $\tilde{y}_t = \frac{\Delta r_t - a_0 - a_1 r_{t-1}}{r_{t-1}^\gamma}$, $\mu_t^* = \frac{\mu(1-\phi) + \delta(\log z_{t+1} + \log z_{t-1})}{1+\phi^2}$, $\sigma^{*2} = \frac{1}{\sigma^{22}(1+\phi^2)}$, $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{bmatrix}$ 이다. 식 (4-13)에 z_t 의 조건부 사후확률밀도함수로부터 직접 표본을 추출하는 것은 불가능하므로 표본추출에 MH알고리즘을 이용할 수 있다. 이를 위해서는 식 (4-13)을 잘 근사하는 후보생성확률밀도함수를 선택하는 것이 필요하다. 식 (4-13)과 같은 조건부 사후확률밀도함수로부터 표본을 추출하는 방법은 Jacquier et al.(2004)과 김태형(2005)에서 제시된 방법을 이용할 수 있다³⁶⁾.

식 (4-13)에서 첫 번째 항과 두 번째 항은 z_t 에 대한 역감마분포(inverse

36) 본 연구에서 $\pi(\Theta, \{z_t\}_{t=1}^T | a_0, a_1, \gamma, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T)$ 로부터 표본을 추출하는 방법은 기본적으로 Jacquier et al.(2004)와 김태형(2005)에서 제시된 방법을 이용한다. 그러나 식 (4-7)의 모형설정은 확률변동성 z_t 가 아닌 z_{t-1} 이 Δr_t 조건부표준편차에 영향을 준다는 측면에서 이들의 연구에서 다루어진 확률변동성모형과 다르다.

gamma distribution) 의 확률커널과 로그정규분포 확률커널의 곱으로 구성되어 있다³⁷⁾. Jacquier et al.(1994)은 로그정규분포의 확률커널을 평균과 분산이 동일한 역감마분포의 확률커널로 근사할 수 있다는 것을 보였다. 따라서 식 (4-13)의 첫번째 항과 두번째 항의 곱을 평균과 분산이 동일한 역감마분포함수의 확률커널로 근사하면 식 (4-13)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \pi(z_t | z_{t-1}, z_{t+1}, \Delta r_t, \Delta r_{t+1}, \psi) \\ \simeq IG(a^*, b^*) \times \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^{12} \frac{\tilde{y}_{t+1}}{\sqrt{z_t}} \eta_{t+1}\right) \end{aligned} \quad (4-14)$$

여기서 $IG(a^*, b^*)$ 는

로케이션 파라미터가 $a^* = \frac{1}{2} + \sigma^{12} \frac{\tilde{y}_t}{\sqrt{z_{t-1}}} + \frac{1 - 2 \exp(\sigma^{*2})}{1 - \exp(\sigma^{*2})}$ 이고 스케일 파라미터가 $\frac{b^* = \sigma^{11} \tilde{y}_{t+1}^2}{2} + \left(\frac{1 - 2 \exp(\sigma^{*2})}{1 - \exp(\sigma^{*2})} - 1 \right) \times \exp(\mu_t + \frac{1}{2} \sigma^{*2})$ 인 역감마분포의 확률커널을 나타낸다. 식 (4-14)의 마지막 지수항에서 $\eta_{t+1}/\sqrt{z_t}$ 는 $IG(a^*, b^*)$ 의 최빈수 근방의 두점을 선택한 다음, 이 두점에서 $\eta_{t+1}/\sqrt{z_t}$ 를 평가한 후 이들의 기울기를 이용하여 $\eta_t/\sqrt{h_t}$ 를 $1/h_t$ 의 선형함수로 근사한다. 이때 얻어진 기울기를 s^* 라 하면, 식 (4-14)의 지수항을 기울기 s^* 를 가지는 $1/h_t$ 에 대한 선형함수로 근사할 수 있다. 이를 통해 식 (4-14)의 조건부 사후확률밀도함수를 다음과 같은 역감마분포의 확률커널로 근사할 수 있다.

$$\pi(z_t | z_{t-1}, z_{t+1}, \Delta r_t, \Delta r_{t+1}, \psi) \simeq IG(a^{**}, b^{**}) \quad (4-15)$$

37) 파라미터 (a, b) 를 갖는 확률변수 z 의 역감마분포의 확률밀도함수는

$$p(z | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{-(a+1)} \exp\left(-\frac{b}{z}\right) \text{ 와 같다.}$$

여기서 $a^{**} = \frac{1}{2} + \sigma^{12} \frac{\tilde{y}_t}{\sqrt{z_{t-1}}} + \frac{1 - 2\exp(\sigma^{*2})}{1 - \exp(\sigma^{*2})}$, $b^{**} = \sigma^{11} \frac{\tilde{y}_{t+1}^2}{2} + \left(\frac{1 - 2\exp(\sigma^{*2})}{1 - \exp(\sigma^{*2})} - 1 \right) \times \exp\left(\mu_t + \frac{\sigma^{*2}}{2}\right) + s^* \sigma^{12} \tilde{y}_{t+1}$ 이다. 식 (4-15)의 역감마분포 확률커널로 근사한 조건부 사후확률밀도함수를 후보생성확률밀도함수로 이용하여 표본을 생성한 후 다음과 같은 확률로 표본을 채택한다.

$$\alpha_{MH}(z_t, z_t^*) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(z_t^* | z_{t+1}, z_{t-1}, \Theta, \Delta r_t, \Delta r_{t+1}) q(z_t)}{\pi(z_t | z_{t+1}, z_{t-1}, \Theta, \Delta r_t, \Delta r_{t+1}) q(z_t^*)} \right\} \quad (4-16)$$

[ii-2] 블록의 조건부 사후확률밀도함수 $\pi(\Theta | a_0, a_1, \gamma, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T, \{z_t\}_{t=1}^T)$ 로부터 파라미터를 표본추출하는 과정은 $\pi(\{\mu, \phi\} | a_0, a_1, \gamma, \Sigma, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T, \{z_t\}_{t=1}^T)$ 로부터 로그변동성방정식의 계수 $\{\mu, \phi\}$ 를 표본추출하는 과정과 $\pi(\Sigma | a_0, a_1, \gamma, \{\mu, \phi\}, \{\Delta r_t\}_{t=1}^T, \{z_t\}_{t=1}^T)$ 로부터 제약하의 공분산행렬을 추출하여 $\{\rho, \sigma_\eta\}$ 를 얻는 과정으로 구성된다. 미관측상태변수인 변동성이 주어졌을 때 $\{\mu, \phi\}$ 를 추출하는 과정은 로그변동성 선형방정식 계수의 조건부 사후확률밀도함수 $\pi(\{\mu, \phi\} | \sigma_\eta^2, \{\log z_t\}_{t=1}^T)$ 로부터 표본을 추출하는 과정으로 축약된다.

$$\pi(\{\mu, \phi\} | \sigma_\eta^2, \{\log z_t\}_{t=1}^T) \propto p(\{\log z_t\}_{t=1}^T | \{\mu, \phi\}, \sigma_\eta^2) p(\{\mu, \phi\}) \quad (4-17)$$

따라서 $\{\mu, \phi\}$ 는 다음의 정규분포를 따르는 조건부 사후확률밀도함수로부터 표본추출할 수 있다.

$$\{\mu, \phi\} \sim N \left(B \left[B_0^{-1} b_0 + \sigma_\eta^{-2} \sum_{t=2}^T \mathbf{W}_t \mathbf{y}_t \right], B \right) I[|\phi| < 1] \quad (4-18)$$

여기서 $B = \left[B_0^{-1} + \sigma_\eta^{-2} \sum_{t=2}^T \mathbf{W}_t \mathbf{W}_t' \right]^{-1}$, $\mathbf{W}_t = (1, \log z_{t-1})'$, $\mathbf{y}_t = \log z_t$ 이다³⁸⁾. 이 과정에서 안정성 제약 $|\phi| < 1$ 을 충족하지 않는 표본이 추출되는 경우 이를 버리고 새로운 표본을 추출하는 기각표본추출법이 이용된다. 표본추출에 소요되는 시간을 단축하고자 한다면 Geweke(1991)에서와 같은 제약하의 다변량정규분포로부터 표본을 추출하는 방법을 이용할 수도 있다.

마지막으로 $\{ \{ \Delta r_t \}_{t=1}^T, \{ z_t \}_{t=1}^T \}$ 와 파라미터 $\{ a_0, a_1, \gamma, \{ \mu, \phi \} \}$ 가 주어졌을 때 $\sigma_{11} = 1$ 의 제약하의 공분산행렬 조건부 사후확률밀도함수 $\pi(\Sigma | a_0, a_1, \gamma, \{ \mu, \phi \}, \{ \Delta r_t \}_{t=1}^T, \{ z_t \}_{t=1}^T)$ 를 식 (4-10)으로부터 도출하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi(\Sigma | \{ \mu, \phi \}, \{ a_0, a_1 \}, \gamma, \{ \Delta r_t, z_t \}_{t=1}^T) &\propto \prod_{t=1}^T p(\epsilon_t, \eta_t | \psi) p(\Sigma) I[\sigma_{11} = 1] \\ &\propto |\Sigma|^{-\frac{n_0 + T + 2 + 1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} \left[V_0 + \sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t & \eta_t \end{pmatrix} \right] \right) I[\sigma_{11} = 1] \end{aligned} \quad (4-19)$$

식 (4-19)는 역위샤트분포의 확률커널이므로 제약하의 공분산행렬 추출은 역위샤트분포로부터 표본을 추출하는 것이 된다.

$$\Sigma \sim IW\left(n_0 + T, \left[V_0 + \sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t & \eta_t \end{pmatrix} \right]^{-1} \right) I[\sigma_{11} = 1] \quad (4-20)$$

38) 식 (4-18)의 조건부 사후확률밀도함수는 $t=1$ 시점의 로그변동성을 생략하고 있으므로 정확한 조건부 사후확률밀도함수는 아니다. 그러나 관측치 T 가 충분히 큰 경우, 식 (4-18)의 근사로 인한 정보 손실은 무시할 수 있는 정도이므로 이와 같은 방법으로 사후표본추출할 수 있다. $t=1$ 시점의 로그변동성을 반드시 고려하고자 하는 경우에는 식 (4-18)을 후보생성확률밀도함수로 이용하는 MH알고리즘을 이용하여 표본추출할 수 있다.

제약하의 공분산행렬 Σ 는 김태형(2005)이 제시한 것과 같은 방법으로 식 (4-20)로부터 표본추출할 수 있다³⁹⁾. 이는 Linardakis and Dellaportas (1999, 2003)와 Nobile(2000)에서 MNP (multinomial probit)모형의 파라미터 식별을 위하여 제약하의 공분산행렬을 추출하는 방법을 준용한 것이다. 제약하의 공분산행렬을 추출하면 추출된 원소들을 이용하여 $\{\rho, \sigma_\eta\}$ 를 계산할 수 있다.

이상에서 제시된 각각의 사후표본추출블록에 포함된 사후조건부확률밀도함수로부터 표본을 추출하는 과정을 충분히 반복하여 사후표본들을 얻은 후 초기의 일정표본(burn-in sample)을 버리고 남은 나머지 표본들을 이용하여 파라미터와 미관측상태변수에 대한 베이지언추론을 할 수 있다.

39) Nobile(2000), 김태형(2005)에서 제약하의 공분산행렬을 추출하는 방법이 자세히 수록되어 있다. 프로그래밍을 위한 절차는 다음과 같다.

알고리즘 : $\sigma_{pp} = \overline{\sigma_{pp}}$ 의 제약하에 $\Sigma \sim IW_p(n, V)$

[1 단계] 다음과 같은 방법으로 하삼각행렬 A 를 구성

[1 단계-i] $a_{pp} = \left[\sqrt{\sigma_{pp}} l_{pp} \right]^{-1}$ 를 계산

[1 단계-ii] $a_{ii} \sim \sqrt{\chi^2(n+1-i)}$, $i = 1, \dots, p-1$

[1 단계-iii] $a_{ij} \sim N(0,1)$ for $(i > j)$

[2 단계] $\Sigma = (L^{-1})' (A^{-1})' A^{-1} L^{-1}$ 계산

여기에서 L 은 $V = L L'$ 의 관계를 만족하는 하삼각행렬이다.

제 5 장 단기이자율 확률변동성모형 실증분석

본 장에서는 이자율 기간구조모형에서 확률변동성의 특성을 설명하기 위한 모형설정의 유효성에 대한 정보를 줄 수 있는 단기이자율 확률변동성모형으로 설정한 식 (4-5)의 연속시간모형에 대한 이산시간모형인 식 (4-7)의 모형에 대한 실증분석 결과를 제시한다. 일반적으로 주간이상의 고빈도자료를 이용하는 경우 이산화편의가 심각하지 않음이 알려져 있다. 본 실증분석에서 주간자료와 일간자료를 사용하므로 식 (4-7)의 이산시간모형에 대한 파라미터 추정결과는 식 (4-5)의 연속시간모형에 대한 파라미터 추정결과로 전환될 수 있다.

일반적으로 연속시간모형에 식 (4-6)과 같은 오일러이산화를 적용하여 얻은 모형에 대한 파라미터 추정치는 이산화에 따른 편의(discretization bias)의 문제를 가지는 것으로 알려져 있다. 이러한 이산화에 따른 편의를 해결하는 방법으로는 연속적인 두 관측시점 사이의 고빈도자료를 생성하여 오일러이산화에 따른 편의를 줄이는 방법들이 이용된다. 이러한 방법은 Pedersen(1995), Brandt and Santa-Clara (2002), Durham and Gallant(2002) 등의 연구에서 연속시간모형에 대한 SML추정(simulated maximum likelihood estimation)에서 제시되었으며, Elerian et al.(2001), Eraker(2001), Jones(2003), Collin-Dufresne et al.(2009) 등의 연구에서는 자료확장의 원리를 이용한 연속시간모형에 대한 베이지언 추론에서 제시하였다. 그러나 일반적으로 주간이상의 고빈도자료(high frequency data)를 이용하는 경우 이산화편의가 심각하지 않음이 알려져 있다. Elerian et al.(2001), Eraker(2001), Jones(2003), Collin-Dufresne et al.(2009)는 주간 또는 일간 자료를 이용한 연속시간모형에 대한 베이지언 추론에서 오일러이산화와 자료확장의 원리에 따른 추가적인 고빈자료의 생성을 통해서 얻은 추정결과와 그렇지 않은 추정결과가 거의 차이가 없음을 제시하였다. 따라서 식 (4-7)의 이산시간모형에 대한 베이지언 추론결과에 제 4장 2

절에서 살펴본 오일러이산화에 따른 파라미터들 사이의 관계를 이용하여 식 (4-5)의 연속시간모형의 파라미터에 대한 추론 또한 가능하다. 그리고 수준효과 파라미터인 γ 와 확률변동성 방정식에 포함된 파라미터들 $\{\mu, \phi, \sigma_\eta, \rho\}$ 의 식별문제를 용이하게 하기위하여 Ball and Torous(1999)와 같이 단기이자율을 기하평균으로 스케일 조정하는 방법이 이용된다.

제 1 절 분석자료

식 (4-7) 또는 식 (4-5) 단기이자율모형에 대한 실증분석자료는 1954년 01월 08일부터 2010년 06월 25일까지 기간의 3개월 만기 미국재무부채권 수익률(TB3M), 1971년 01월 08일부터 2010년 06월 25일까지 기간의 1개월 만기와 3개월 만기 유로달러이자율(ED1M, ED3M), 1998년 06월 05일부터 2010년 06월 25일까지 기간의 잔존만기 3개월 한국의 국채수익률(KRTB3M) 주간자료를 이용하였다. 그리고 오일러이산화, 유동성제약(liquidity constraints), 주말효과(weekend effect) 등의 요인에 의해 발생할 수 있는 편의를 살펴보기 위해 1954년 01월 04일부터 2010년 06월 30일까지 기간의 TB3M, 1971년 01월부터 2010년 06월까지 기간의 ED1M 및 ED3M, 1998년 06월부터 2010년 06월까지 기간의 KRTB3M 자료의 일간 자료도 분석에 사용하였다. 실증분석에 사용된 자료 중 미국재무부채권수익률과 유로달러이자율 자료는 미연방준비위원회에서 제공하며⁴⁰⁾, 잔존만기 3개월 한국의 국채수익률자료는 금융투자협회에서 제공한 것이다. 이들 자료에 대한 요약통계량은 [표 4-1]에 제시되어 있다. [표 4-1](a)에서 왜도가 모두 양(+)의 값을 가지는 것으로 나타나고 있어 단기이자율은 모두 오른쪽으로 길게 꼬리는 늘어뜨리는 분포를 가지고 있음을 알 수 있다.

40) <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.html>의 h15파일에 수록되어 있다.

[표 5-1] 단기이자율에 대한 요약통계량(주간)

(a) 요약통계량(r_t)

	TB3M(W)	ED3M(W)	ED1M(W)	KRTB3M(W)
평균	0.0496	0.0662	0.0645	0.0491
표준편차	0.0289	0.0369	0.0368	0.0207
최소	0.0002	0.0040	0.0028	0.0162
최대	0.1676	0.2098	0.2241	0.1737
왜도	0.9923	0.9287	0.9742	2.1174
첨도	4.6401	4.2528	4.5446	11.7680
정규성검정	813.91 (0.0)	430.86 (0.0)	530.6 (0.0)	2536.2
1차자기상관 (r_t)	0.9978	0.9975	0.9970	0.9703
1차자기상관 (r_t^2)	0.9944	0.9932	0.9925	0.9357

(b) 요약통계량(Δr_t)

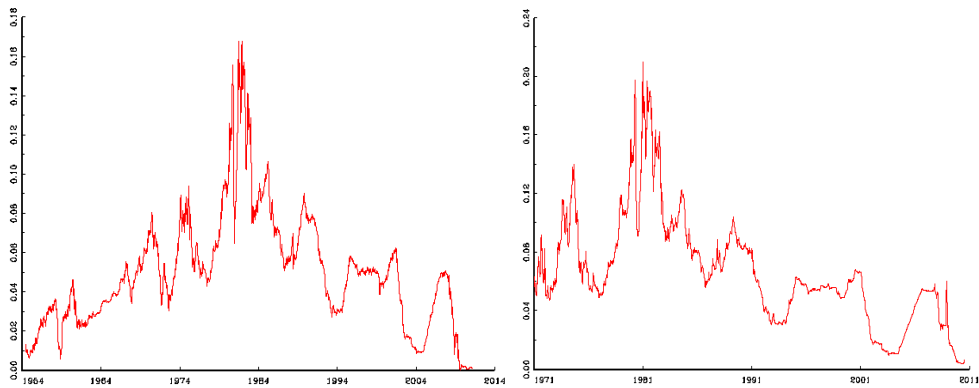
	TB3M(W)	ED3M(W)	ED1M(W)	KRTB3M(W)
평균	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0002
표준편차	0.0020	0.0029	0.0031	0.0015
최소	-0.0182	-0.0277	-0.0293	-0.0120
최대	0.0192	0.0269	0.0278	0.0052
왜도	-0.7070	-0.7071	0.1631	-3.6261
첨도	25.4695	26.0709	22.1361	25.1996
정규성검정	62219.16 (0.0)	45835.5 (0.0)	31425.2 (0.0)	14567.11 (0.0)
1차자기상관 (Δr_t)	0.2626	0.2684	0.2705	0.3443
1차자기상관 ($(\Delta r_t)^2$)	0.2552	0.2480	0.3344	0.3368

주) 정규성 검정통계량은 Jarque-Bera 검정통계량이며 괄호안의 수치는 p-value를 나타낸다.

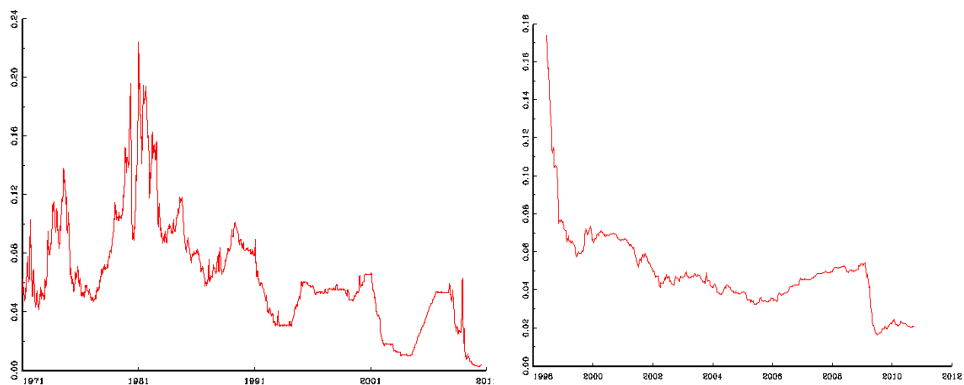
그리고 모두 3이상의 초과침도를 가지는 것으로 나타나고 있으며 KRTB3M의 경우 11.76의 매우 높은 침도를 보여주고 있다. 이러한 왜도와 침도의 특성은 이자율수준이 비정규분포를 따른다는 것을 의미하는데 이는 [표 5-1]의 정규성검정통계량을 통해서도 확인할 수 있다. 또한 단기이자율과 단기이자율제공이 단위근에 가까운 지속성을 보이고 있음을 알 수 있다.

[그림 5-1] 단기이자율 추이(주간)

TB3M(주간): 1954/01/08~2010/06/25 ED3M(주간): (1971/01/08~2010/06/25)



ED1M(주간): (1971/01/08~2010/06/25) KRTB3M(주간): (1998/06/05~2010/06/25)



[표 5-1]의(b)는 단기이자율의 변화분 Δr_t 의 요약통계량인데, ED1M을 제외한 나머지 단기이자율의 변동은 음의 왜도를 가지는 것으로 추정되어, 상승할 때보다 하락할 때 더 크게 하락하는 특징이 있는데 반해, ED1M은 하락할 때보다 상승할 때 더 크게 상승하는 경향이 있음을 보여주고 있다. 이러한 특징을 보여주는 단기이자율 추이는 [그림 5-1]에 제시되어 있다. [그림 5-1]에서 2008년 하반기 이후 세계적인 금융위기로 인하여 전반적인 저금리 추세가 지속되고 있음을 보여준다.

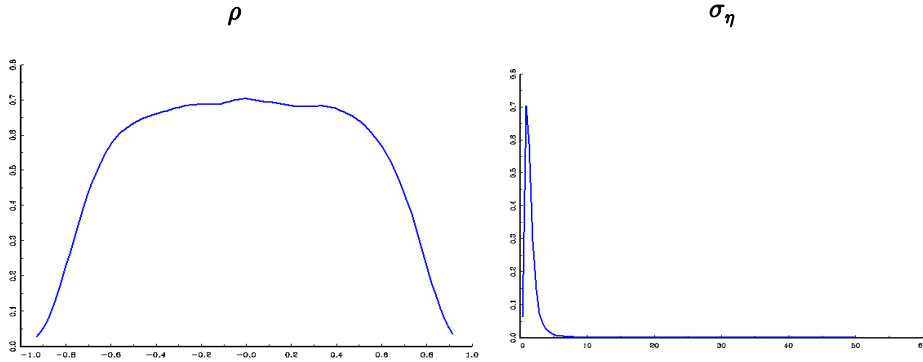
제 2절 사전확률분포함수의 파라미터 설정

이산시간 단기이자율모형의 파라미터에 대한 사후추론 결과는 사전확률밀도함수의 설정에 따라 민감하게 달라질 수 있으므로 다음과 같이 정보를 가지지 거의 않는 사전확률분포의 파라미터(uninformative priors)를 설정하였다.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{a} = (0, -10^{-5})' , & \underline{A} = 10^2 I_2 \\ \underline{g} = 0.5 & , \quad \underline{G} = 10^2 \\ b_0 = (0, 0)' & , \quad B_0 = 10^2 I_2 \\ n_0 = 3 & , \quad V_0 = 3 I_2 \end{array} \right. \quad (5-1)$$

식 (5-1)과 같은 제약하의 공분산행렬에 대한 사전확률분포의 파라미터 설정은 [그림 5-2]에서와 같은 파라미터 ρ 와 σ_η 의 사전확률분포를 설정함을 의미한다. [그림 5-2]는 식 (5-1)의 제약하의 공분산행렬에 대한 역위샷트분포의 사전확률분포로부터 10만개의 표본을 생성하여 얻은 $\{\rho, \sigma_\eta\}$ 의 표본에 대한 커널확률밀도함수(kernel probability density function)를 나타낸다.

[그림 5-2] 제약하의 공분산행렬에 포함된
파라미터 $\{\rho, \sigma_\eta\}$ 의 사전확률분포



제 3 절 분석결과

식 (5-1)과 같이 파라미터에 대한 사전확률분포를 설정한 후 제 3.2절에서 제시된 알고리즘을 이용하여 식 (3-7)에 대한 MCMC를 이용한 베이지언추론을 수행하였다. 각각의 자료에 대한 분석에서 총 15만개의 사후표본을 추출한 다음, 초기의 5만개의 표본을 ‘burn-in’표본으로 간주하여 버린 후 남은 10만개의 사후표본을 분석하였다. 이 때 사후표본의 종속성을 고려하여 10만개의 분석대상 사후표본을 10개 간격으로 하나씩 취하여 얻은(thinning) 1만개의 사후표본을 최종분석에 이용하였다.

먼저, 제 3장 2절에서 제시된 베이지언추론 결과의 안정성을 확인하기 위하여 1954년 01월 06일부터 1995년 04월 19일까지 기간의 3개월만기 미국재무부채권이자율에 대한 본 연구의 베이지언추정 결과와 Andersen and Lund(1997)의 EMM 추정결과를 비교해 보기로 한다. [표 5-2]에서 식 (3-7)의 이산시간모형과 식 (3-5)의 연속시간모형에 대한 베이지언추론 결과와 함께 $\{\epsilon_t, \eta_t\}$ 가 서로 독립이라는 제약을 부과한 모형에 대한 Andersen and Lund(1997)의 EMM 추정결과가 제시되어 있다. [그림

5-3]에는 사후표본에 대한 요약통계량을 그래프들로 나타내었다. [그림 5-3]에서(a)패널의 각 행은 사후표본추출된 파라미터의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관계수(acf), 커널확률밀도(kernel density) 그리고 박스플롯(box plot)을 나타낸다. 그리고(b)패널의 대각성분은 각 파라미터의 사후표본이 수렴하는가를 평가하기 위하여 Yu and Mykland(1998)와 Bauwens and Lubrano(1998)의 정규화된 CUSUM플롯⁴¹⁾을 도시한 것이며, 비대각성분은 사후표본들의 산포도와 상관계수를 나타낸다.(b)패널의 CUSUM플롯을 통해 모든 파라미터의 사후표본 수렴에는 전혀 문제가 없음을 확인 할 수 있다. 특히 수준효과 파라미터 γ 에 대한 사후표본의 경우 [그림 5-3](a)패널의 3행 2열에 도시된 자기상관계수는 다소 크고 지속적인 것으로 나타나지만 CUSUM플롯에서 사후표본의 수렴에는 문제가 없는 것으로 판단할 수 있다. 식 (3-7)의 이산시간모형은 식 (3-5)의 연속시간모형에 오일러이산화를 적용하여 얻어진 것이다. 따라서 식 (3-5)의 파라미터에 대한 베이지언 추정치는 연속시간모형 파라미터 사후표본과 이산화에 따른 이산시간모형 파라미터의 관계를 이용하여 얻어진 것이다. 앞서 언급한 바와 같이 주간이상의 고빈도자료를 이용하는 경우 이산화의 편의가 무시할 수 있는 정도라는 것이 알려져 있으므로 이를 근거로 이산시간모형의 파라미터에 대한 사후표본을 이용하여 연속시간모형의 파라미터에 대한 사후추론 결과를 얻었다. [표 5-2]에는 각각의 파라미터에 대한 사후표본의 표본평균, 표준편차, 그리고 95% HPD신뢰구간(highest probability interval)이 제시되어 있다. [표 5-2]에서 []안의 수치는 사후표본의 표

41) Yu and Mykland(1998)와 Bauwens and Lubrano(1998)의 CUSUM플롯은 다음과 같이 정의되는 \tilde{S}_τ 를 τ 에 대하여 도시한 것이다.

$$\tilde{S}_\tau = \frac{\left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \theta_t - \mu_\theta \right)}{\sigma_\theta} \quad \text{for } \tau = 1, \dots, N$$

여기에서 μ_θ 는 표본추출된 파라미터에 대한 표본평균, σ_θ 는 표본표준편차를 나타낸다. 이와 같이 정규화된 CUSUM플롯을 이용하여 파라미터들의 수렴여부를 판단할 수 있다.

준편차를 나타내며, (,)안의 수치는 95% HPD구간(highest probability density interval)의 하한과 상한을 나타낸다. 여기서 표준편차는 MCMC를 이용한 베이지언추론에서 사후표본의 종속성을 고려하여 bandwidth를 500으로 설정하고 다음과 같은 Parzen커널(Parzen kernel)을 이용하여 구한 것이다.

$$K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3 & , \quad z \in [0, 1/2] \\ 2(1-z)^3 & , \quad z \in [1/2, 1] \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases}$$

Parzen커널을 이용하면 다음과 같이 사후표본의 종속적인 계열상관을 고려한 표본공분산을 얻을 수 있다.

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{2B_w}{B_w - 1} \sum_{j=1}^{B_w} K\left(\frac{j}{B_w}\right) \Gamma_j$$

여기서 Γ_j 는 자기공분산을 나타낸다. [표 5-2]에는 계열상관을 고려한 표준편차와 함께 사후표본분포의 비대칭성을 감안하기 위하여 95% HPD구간의 상한과 하한이 제시되어 있다. 이러한 사후표본의 비대칭적인 특징은 [그림 5-3](a)패널의 3열에 도시된 사후표본의 커널확률밀도함수를 통해서 쉽게 알 수 있다.

[표 5-2]에서 파라미터 γ 의 사후표본평균은 0.601로 추정되었다. 표준편차를 감안하면 이와 같은 파라미터 γ 에 대한 추정치는 ATSM이나 CIR모형에서와 같은 $\gamma = 0.5$ 의 고정값과 유사하다. 그리고 오차항 $(\epsilon_t, \eta_t)'$ 의 상관관계수인 ρ 는 -0.0270의 사후평균과 95% HPD구간에서 (-0.1708, 0.1207)의 상한과 하한을 가지는 것으로 추정되어 $\rho \neq 0$ 라고 할 통계적 증거가 충분하지 않음을 알 수 있다. 이와 같은 ρ 에 대한 추정결과는 본 논문에서

제시한 사후표본추출방법에 의해서 얻은 이산시간모형의 파라미터 추정결과를 이용하여 구할 수 있는 연속시간모형의 파라미터에 대한 추정치를 Andersen and Lund(1997)의 EMM 추정결과와 직접 비교할 수 있도록 해준다. [표 5-2]의 두번째 열에 제시된 결과는 이산시간모형의 사후표본을 이용하여 얻은 연속시간모형의 파라미터에 대한 추정결과이며 세 번째 열에 제시된 결과는 AL의 EMM 추정결과이다. 파라미터에 대한 추정치를 비교할 때 AL의 결과는 백분율 이자율을 이용하여 추정한 결과라는 점을 고려하여야 한다. 그러므로 AL에서 θ_1 의 경우는 추정치를 100으로 나누어 주어야 하며, θ_2 의 경우에는 $\log 10^4 = 9.21034$ 을 차감하여야 추정치가 서로 비교가능하다. 본 연구에서 얻은 파라미터 γ 에 대한 추정치는 0.6013이고 이에 비해 AL의 추정치는 0.544이지만 표준편차를 감안할 때 큰 차이로 보기 어렵다. 그리고 단기이자율의 평균회귀속도인 κ_1 의 경우에는 본 연구에서 얻은 베이지언 추정치가 AL의 EMM추정치에 비해 다소 크게 추정되었으며, 로그변동성의 평균회귀속도인 κ_2 의 경우에는 반대로 베이지언추정치가 EMM 추정치에 비해 다소 작게 추정되었다. 이러한 κ_2 추정치의 차이는 로그변동성의 평균인 θ_2 의 베이지언 추정치가 EMM 추정치에 비해 더 크게 나타나는 결과와 관련되어 있다. 그런데 연속시간모형의 로그변동성의 변동성파라미터 σ_z 의 경우에는 베이지언추정치 2.22가 EMM추정치 1.27에 비해 약 75%정도 더 큰 것으로 나타나고 있다. 이러한 결과의 차이에도 불구하고 [그림 5-4]에 도시된 수준효과를 포함하는 확률변동성 $\sqrt{z_{t-1}} r_{t-1}^\gamma$ 의 95% HPD구간의 상한, 하한, 평균 그리고 단기이자율변동의 절대치 $|\Delta r_t|$ 를 보면 모형의 적합도가 그리 나쁘지 않은 것으로 나타난다.

[표 5-2] 단기 이자율모형 추정결과 비교 TB3M(1954/01/06 ~ 1995/04/19)

	MCMC		MCMC	EMM Andersen and Lund (1997)
a_0	0.2419×10^{-2} [0.93911 $\times 10^{-3}$] (0.7019 $\times 10^{-3}$, 0.4262 $\times 10^{-2}$)	κ_1	0.0950 [0.0571] (3.5095 $\times 10^{-5}$, 0.1968)	0.163 [0.057]
a_1	-0.1826×10^{-2} [0.1098 $\times 10^{-2}$] (-0.3784 $\times 10^{-2}$, -6.7492 $\times 10^{-7}$)	θ_1	0.0664	5.95 [0.464]
γ	0.6013 [0.1814] (0.2517, 0.9602)	γ	0.6013 [0.1814] (0.2517, 0.9602)	0.544 [0.084]
μ	-0.1977 [0.0525] (-0.3036, -0.0990)	κ_2	1.4728 [0.3857] (0.7358, 2.2462)	1.04 [0.127]
ϕ	0.9716 [0.0074] (0.9568, 0.9858)	θ_2	-5.4411 [1.1170] (-7.7277, -3.3831)	-0.282 [0.180]
σ_η	0.3073 [0.0270] (0.2591, 0.3644)	σ_Z	2.2164 [0.1947] (1.8684, 2.6281)	1.27 [0.059]
ρ	-0.0270 [0.0749] (-0.1708, 0.1207)	ρ	-0.0270 [0.0749] (-0.1708, 0.1207)	.

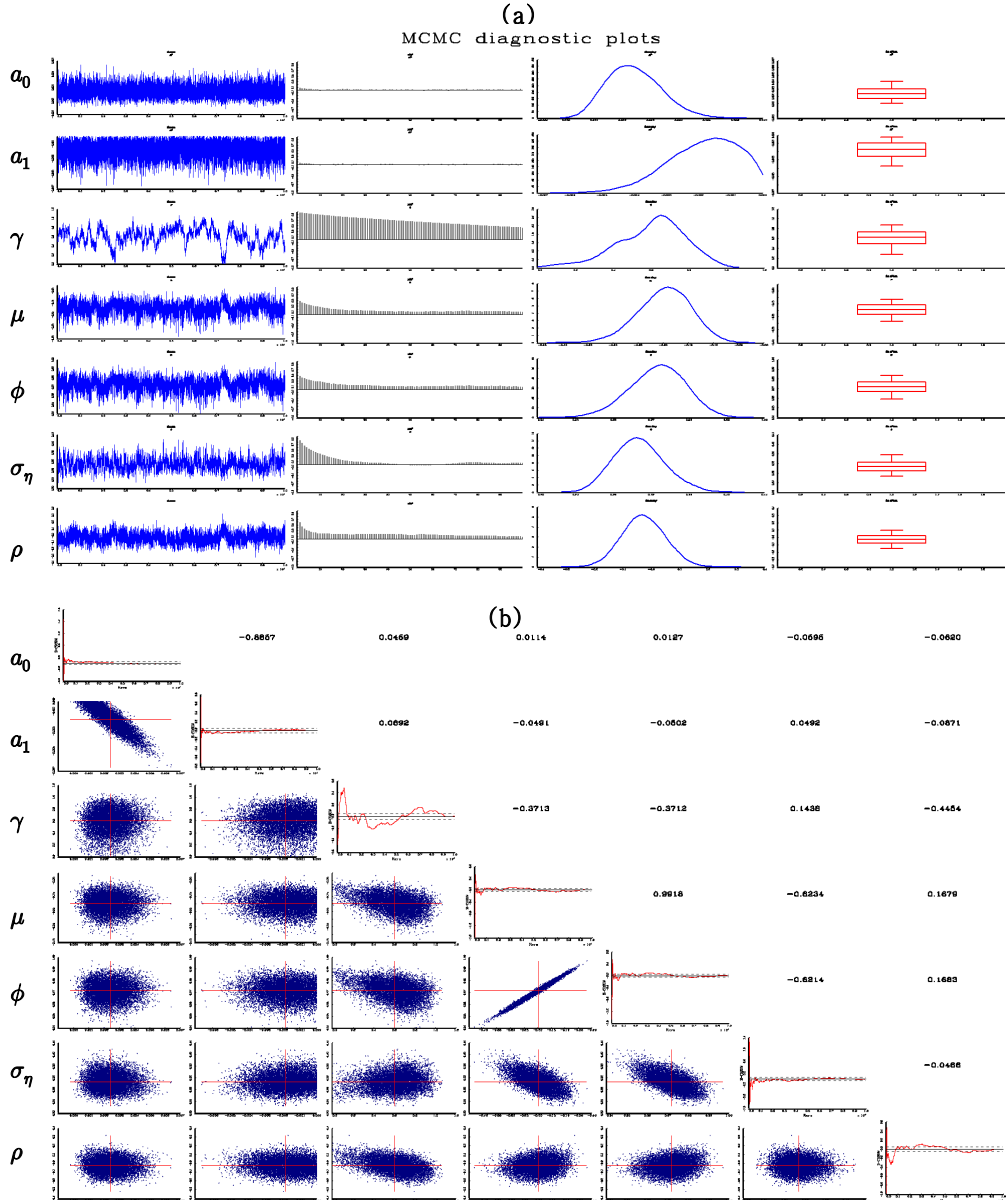
주) 표는 다음의 이산시간 및 연속시간 단기이자율모형에 대한 MCMC를 이용한 베이저언추론 결과를 제시한 것이다.

$$\begin{cases} \Delta r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + r_{t-1}^\gamma \sqrt{z_{t-1}} \epsilon_t \\ \log z_t = \mu + \phi \log z_{t-1} + \eta_t \\ \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \sigma_\eta \\ \rho \sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\theta_1 - r_t) dt + \exp\left(\frac{Z_t}{2}\right) r_t^\gamma dW_{1t} \\ dZ_t = \kappa_2 (\theta_2 - Z_t) dt + \sigma_z dW_{2t} \\ E_t[dW_{1t} dW_{2t}] = \rho dt \end{cases}$$

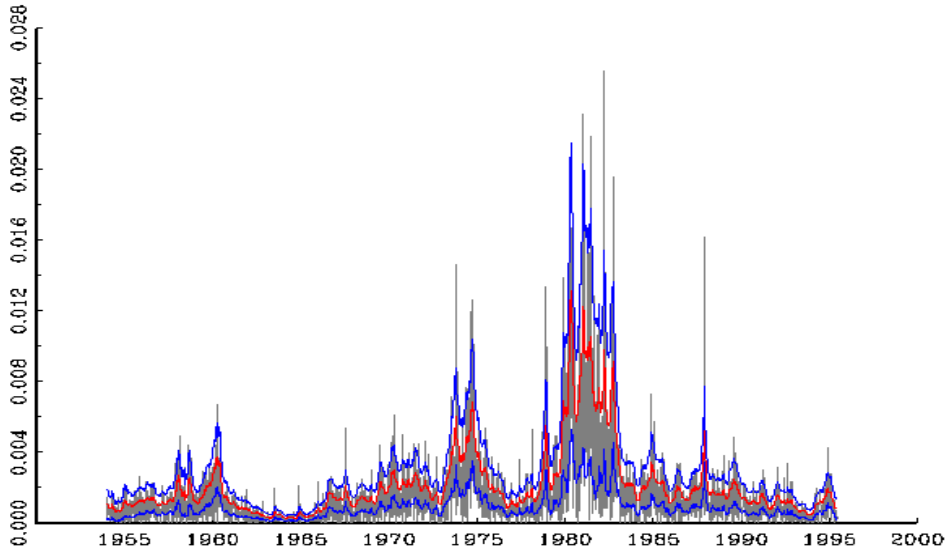
표에서(,)괄호안의 수치는 95% HPD구간(highest probability density interval)의 하한과 상한을 나타내며, []안의 수치는 Bandwidth를 500으로 설정하고 다음과 같은 Parzen kernel을 이용하여 구한 사후표본의 표준편차를 나타낸다.

$$K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3 & , \quad z \in [0, 1/2] \\ 2(1-z)^3 & , \quad z \in [1/2, 1] \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases}, \quad \Gamma = \Gamma_0 + \frac{2B_w}{B_w - 1} \sum_{j=1}^{B_w} K(j/B_w) \Gamma_j, \quad \Gamma_j \text{는 자기공분산}$$

[그림 5-3] 파라미터에 대한 베이지언추론 결과
(TB3M : 1954/01/06 ~ 1995/04/19)



[그림 5-4] 확률변동성 베이지언추론 결과(TB3M(W) : 1954/01/06 ~ 1995/04/19)



주) 그림은 $|\Delta r_t|$ 와 함께 다음과 같은 확률변동성모형에 대한 베이지언추론을 통하여 얻은 평활화된 변동성(smoothed volatility), 그리고 평활화된 변동성의 95% HPD 신뢰구간을 도시한 것이다.

$$\begin{cases} \Delta r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + r_{t-1}^2 \sqrt{z_{t-1}} \epsilon_t \\ \log z_t = \mu + \phi \log z_{t-1} + \eta_t \\ \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \sigma_\eta \\ \rho \sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \end{cases}$$

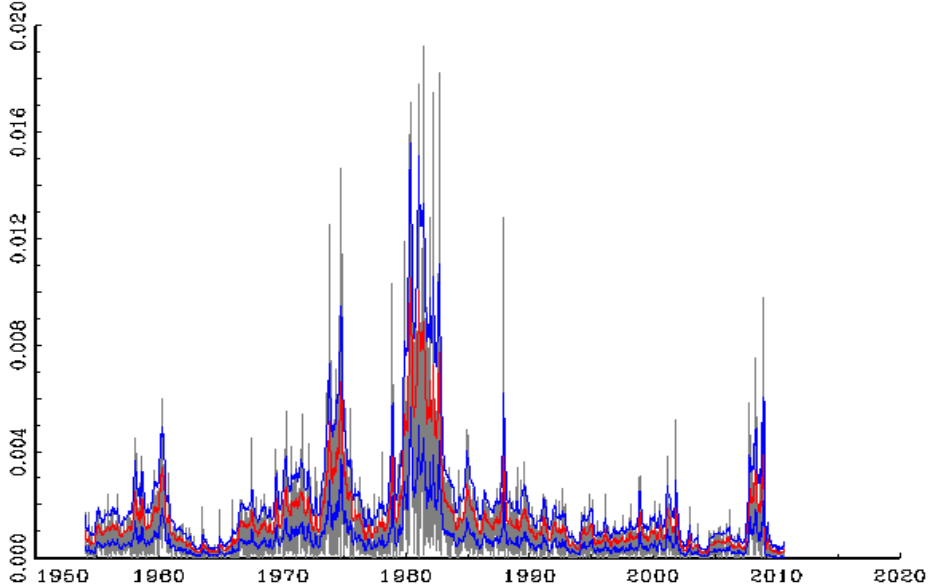
다음으로 본 연구에서 분석대상으로 선택한 기간의 TB3M, ED1M과 ED3M 그리고 KRTB3M의 주간자료와 이들의 일간자료에 대한 베이지언 추론 결과를 살펴보기로 한다. [표 5-3]에는 이들 주간자료를 이용한 이산 시간모형에 대한 베이지언추론의 결과가 제시되어 있다. [그림 5-5]에 도시된 TB3M 주간자료를 이용하여 얻은 사후표본에 대한 CUSUM플롯을 통해 사후표본의 수렴에는 문제가 없음을 확인할 수 있다. [표 5-3]의 TB3M 주간자료에 대한 베이지언추론 결과, 파라미터 ρ 를 제외한 나머지 파라미터는 [표 5-2]에 제시된 결과와 유사함을 알 수 있다. ρ 의 경우에는 95% HPD신뢰구간이 0을 포함하고 있지 않으므로 유의적인 음의 값을 가지는 것으로 추정된다. 이러한 추정치의 차이는 2008년 하반기 미국금융 위기이후 지속되어온 FRB의 저금리정책과 관련된 것으로 해석할 수 있을

것이다. 수준효과 파라미터인 γ 의 사후평균은 0.4792이지만 95% HPD신뢰구간은(0.3325, 0.6313)으로 추정되어 γ 가 0.5가 아니라는 통계적인 증거는 충분하지 않다. [그림 5-6]의 수준효과를 포함하는 확률변동성 $\sqrt{z_{t-1}} r_{t-1}^\gamma$ 의 평균, 95% HPD구간 그리고 $|\Delta r_t|$ 를 보면 [표 5-3]에서 얻은 추정치에 근거한 확률변동성이 이자율변동을 비교적 잘 설명하고 있음을 알 수 있다. 또한 [표 5-4]의 일간자료에 대한 추정결과 에서도 γ 와 ρ 를 제외한 나머지 파라미터 추정치에서는 주간자료와 유사한 결과를 보여준다. 그러나 일간자료 γ 의 사후표본평균이 0.23, 95% HPD신뢰구간은(0.1060, 0.3542)으로 추정되어 주간자료에 비해 수준효과가 다소 약화되는 것으로 나타났다. ρ 의 경우에는 95% HPD신뢰구간(-0.0680, 0.0462)이 0을 포함하고 있으므로 유의적이지 않다. 이러한 주간자료와 일간자료의 추정결과의 차이는 유동성제약, 주말효과 등의 잡음(noise)에 따른 결과로 판단된다.

ED3M과 ED1M에 대한 추론결과⁴²⁾에서는 변동성의 지속성 파라미터 ϕ , 수준효과 파라미터 γ 의 추정치가 TB3M의 추정치와 매우 다른 것으로 나타난다. TB3M에서 ϕ 의 사후표본평균 0.97은 주간이나 일간 주가지수수익률에서 나타나는 정도의 크기를 가지는 것으로 추정되었지만 ED3M과 ED1M의 ϕ 의 사후표본평균은 모두 0.76으로 추정되어 상대적으로 로그확률변동성의 지속성이 상대적으로 작은 것으로 나타난다. 그리고 ED3M과 ED1M에 대한 γ 의 사후표본평균은 각각 1.99, 1.42로 추정되었다. 이러한 수준효과의 크기는 TB3M과 달리 ED3M과 ED1M의 조건부변동성의 이자율수준에 대한 의존정도가 매우 크다는 것을 뜻한다. 이러한 특징은 [표 5-4]의 일간자료에 대한 추론결과에서도 동일하게 나타난다. 특히 ED1M의 일간자료에서 추정된 수준효과의 사후표본평균은 1.93으로 주간자료에 비해 더 크게 나타나고 있다. 그러나 ρ 에 대한 추정치는 주간자료와 일간자료에 대한 분석에서 모두 유의적이지 않은 것으로 나타났다.

42) 지면관계로 ED3M과 ED1M의 사후표본 요약통계량 그래프는 생략하기로 한다. 이 두 자료에서 얻은 사후표본의 CUSUM플롯들은 모두 사후표본의 수렴에 문제가 없는 것으로 나타났다.

[그림 5-6] 확률변동성 베이지언추론 결과(TB3M(W) : 1954/01/08 ~ 2010/06/25)



주) 그림은 $|\Delta r_t|$ 와 함께 다음과 같은 확률변동성모형에 대한 베이지언추론을 통하여 얻은 평활화된 변동성(smoothed volatility), 그리고 평활화된 변동성의 95% HPD 신뢰구간을 도시한 것이다.

$$\begin{cases} \Delta r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + r_{t-1}^2 \sqrt{z_{t-1}} \epsilon_t \\ \log z_t = \mu + \phi \log z_{t-1} + \eta_t \\ \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \sigma_\eta \\ \rho \sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \end{cases}$$

다음으로 KRTB3M에 대한 베이지언추론 결과를 살펴보자. [그림 5-7]의 주간자료에 대한 파라미터들의 사후표본에 대한 요약통계량그래프를 보면, $\{a_0, a_1, \gamma\}$ 파라미터 사후표본들의 자기상관계수가 크고 지속적인 것으로 나타난다. 이러한 사후표본들의 특성으로 인하여 (b)패널에 도시된 CUSUM플롯에서 $\{a_0, a_1, \gamma\}$ 의 수렴속도가 변동성방정식에 포함된 파라미터들에 비해서 상대적으로 느린 것으로 나타나고 있다. 그러나 수렴속도가 느리기는 하지만 수렴에는 문제가 없는 것으로 판단할 수 있다. KRTB3M 주간자료에 대한 베이지언분석에서 특징적인 결과는 수준효과

파라미터 γ 의 사후표본평균이 0.89, 95% HPD신뢰구간이(0.5374 , 1.2489)로 추정된 것이다. 이러한 γ 의 추정결과는 단기이자율의 수준효과의 크기가 TB3M, ED1M 그리고 ED3M과 매우 다르다는 것을 의미한다. 상관관계 파라미터 ρ 는 95% HPD신뢰구간이 0을 포함하고 있으므로 비유의적이다. [표 5-4]에 수록된 일간자료에 대한 베이지언추론 결과에서도 이러한 경향은 유지되고 있다. 하지만 일간자료에 대한 추론결과에서는 γ 의 사후표본평균이 1.40, 95% HPD신뢰구간이(1.2350, 1.5672)으로 추정되어 수준효과가 더 크게 나타나고 있다. 이러한 수준효과의 크기는 ISRM에서 설정한 수준효과의 크기인 1.5에 가까운 γ 값을 가지는 것으로 볼 수 있다.

[표 5-5]와 [표 5-6]에는 식 (4-5)의 연속시간모형에 대한 베이지언추론 결과가 제시되어 있다. 연속시간모형의 파라미터 추정치는 오일러이산화 과정에 포함된 이산시간모형의 파라미터와 연속시간모형의 파라미터들의 관계를 이용하여 식 (4-7)의 이산시간모형의 사후표본을 변환하는 방법으로 얻은 것이다. 연속시간모형에 대한 추론결과는 주간이상의 고빈도자료를 이용하는 경우 이산시간모형에 대한 베이지언추론 결과를 연속시간모형에 대한 결과로 해석할 수 있음을 이용한 것이다. [표 5-5]는 [표 5-3]의 주간자료에 대한 베이지언추론에서 얻어지는 파라미터들의 사후표본을 이용한 연속시간모형에 대한 추론결과이며, [표 5-6]은 [표 5-4]의 일간자료에 대한 파라미터들의 사후표본을 이용한 연속시간모형에 대한 추론결과이다. 이들 표에서 γ 와 ρ 는 이산시간모형에서의 값과 동일하다. 단기이자율의 평균에 대한 추정치는 스케일 조정된 자료를 이용한 점과 TB3M을 제외한 단기이자율들이 단위근에 가까운 지속성을 가진다는 점을 고려하여 생략하였다. 단기이자율이 단위근에 가까운 지속성을 가지지 않는 경우, 단기이자율의 기하평균 $\overline{r_g}$ 와 $\theta_1 = -(a_0/a_1) \overline{r_g}$ 의 관계를 이용하여 θ_1 의 추정치를 구할 수 있다. 그러나 연속시간모형에 대한 베이지언추론을 위해서는 식 (4-7)과 달리 이산시간모형을 연속시간모형과 같이 평균과 평균회귀속도가 분리된 모형으로 설정하는 것이 파라미터에 대한 안정적인 표본추론에 보다 유리할 수 있다.

이상에서 살펴본 단기이자율 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과는 확률변동성의 수준효과가 이자율자료에 따라서 다양한 크기를 가짐을 보여준다. 이러한 수준효과의 특성은 [표 4-1]의 단기이자율모형을 미관측 상태변수로 포함하는 다요인 모형으로 확장한 모형인 ATSM, QTSM, ISRM 등의 이자율 기간구조모형 설정과 밀접한 관련이 있음을 보여준다. 해석적인 채권가격과 다루기 쉬운 특성으로 인해 일반적으로 이용되고 있는 이들 모형들은 현실에서 관측되는 확률변동성을 포착하기 위한 설정을 가지고 있다. 이러한 설정은 대부분 단기이자율모형의 설정을 다요인 모형으로 확장한 모형이다. 그러므로 이들 모형들은 단기이자율모형과 동일한 확률변동성의 특성을 포착하기 위한 모형설정을 가지고 있다. 앞서 논의한 바와 같이 ATSM, QTSM, ISRM은 사전적으로 조건부확률변동성에 포함된 수준효과 크기를 특정 값으로 고정시키는 모형이다. 그러나 실증 분석 결과 단기이자율 확률변동성의 수준효과는 TB3M을 제외한 대부분의 자료에서 ATSM과 QTSM에서 고정하여 설정하고 있는 수준효과의 크기와 매우 상이한 결과를 보여주고 있다. 이와 같이 서로 다른 수준효과의 크기는 베이지언추론에서 얻어진 수준효과 파라미터 γ 의 사후표본들의 커널확률밀도함수가 도시된 [그림 5-9]을 통해 보다 뚜렷하게 비교할 수 있다. 그림에서 좌측과 우측에 각각 주간자료와 일간자료로부터 얻은 γ 의 커널확률밀도함수가 도시되어 있다. 그리고 각각의 그림에서 실선은 TB3M, 긴 점선은 ED1M, 짧은 점선은 ED3M, 1점 쇄선은 KRTB3M 자료에 대한 분석에서 사후표본추출된 γ 의 커널확률밀도함수를 나타낸다. [그림 5-9]에서 TB3M을 제외한 ED1M과 ED3M, KRTB3M으로부터 사후표본추출된 γ 의 커널확률밀도함수는 ATSM보다 상당히 큰 수준효과가 존재함을 보여주고 있다. 요약하면 3개월만기 미재무부채권이자율 분석에서 추정된 수준효과는 ATSM에서 설정된 수준효과에 가까운 것으로 나타났다으며, 1개월만기 유로달러이자율 주간자료에 분석에서는 ISRM의 수준효과에 가까운 것으로 나타났다. 그리고 3개월만기 유로달러이자율 주간 및 일간자료와 1개월만기 유로달러이자율 일간자료 분석에서는 ISRM

보다 더 큰 수준효과가 존재하는 것으로 나타났다. 한국의 국채수익률 주간자료 분석에서는 수준효과 크기가 QTSM에 설정된 값에 가깝지만, 일간자료의 분석결과는 ISRM의 설정값에 가까운 것으로 나타났다.

이러한 결과는 현실에서 관측되는 이자율기간구조의 조건부 1차 및 2차 적률의 특성을 포착하기 위한 분석모형을 선택하는데 있어서 중요한 단서를 제공하고 있다. 이뿐 아니라 기존의 이자율 기간구조모형이 포착하기 어려운 2차이상의 조건부적률의 특성을 포착하기 위한 새로운 이자율 기간구조모형이 요구된다는 연구방향을 제시한다. 특히, 분석의 결과는 ATSM이 추정의 상대적 용이성으로 실증분석에 자주 사용되지만 한국의 이자율기간구조 조건부이차적률의 수준효과를 충분히 설명할 수 없는 모형임을 보여주고 있다. Dai and Singleton(2003)은 미국국채수익률자료에 대한 기간구조모형추정에서 DS의 $A_1(3)$ 모형의 경우 조건부확률변동성의 지속성마저도 설명하기 어렵다는 결과를 제시하고 있다. 본 연구의 실증 분석 결과는 한국국채에 대한 이자율 기간구조모형으로 ATSM이 조건부 이차적률의 동태적인 특성을 포착하는데 충분하지 않을 수 있으므로 ATSM을 이용한 기간구조분석에서 이러한 모형설정 측면에서의 한계점에 대한 고려가 필요함을 보여준다.

[표 5-3] 이산시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(주간)

	TB3M(W) (1954/01/08~2010/06/25)	ED3M(W) (1971/01/08~2010/06/25)	ED1M(W) (1971/01/08~2010/06/25)	KRTB3M(W) (1998/06/05~2010/06/25)
a_0	1.3623×10^{-3} [0.3780 $\times 10^{-3}$] (0.6511 $\times 10^{-3}$, 2.1280 $\times 10^{-3}$)	5.3315×10^{-7} [4.1234 $\times 10^{-6}$] (-6.8495 $\times 10^{-8}$, 1.3803 $\times 10^{-6}$)	7.9239×10^{-7} [1.9298 $\times 10^{-6}$] (-3.0365 $\times 10^{-6}$, 4.8318 $\times 10^{-6}$)	1.5995×10^{-3} [0.9213 $\times 10^{-3}$] (7.0853 $\times 10^{-5}$, 0.3331 $\times 10^{-2}$)
a_1	-0.3353×10^{-3} [0.2835 $\times 10^{-3}$] (-0.8975 $\times 10^{-3}$, -3.2877 $\times 10^{-8}$)	-6.9978×10^{-6} [5.3079 $\times 10^{-6}$] (-1.7245 $\times 10^{-5}$, -6.1226 $\times 10^{-10}$)	-7.1913×10^{-6} [5.5964 $\times 10^{-6}$] (-1.7986 $\times 10^{-5}$, -4.4935 $\times 10^{-10}$)	-1.5082×10^{-3} [0.8734 $\times 10^{-3}$] (-0.3104 $\times 10^{-2}$, -1.8956 $\times 10^{-5}$)
γ	0.4792 [0.0787] (0.3325, 0.6313)	1.9899 [0.0700] (1.8536, 2.1194)	1.4215 [0.0471] (1.3277, 1.5095)	0.8873 [0.1806] (0.5374, 1.2489)
μ	-0.1898 [0.0430] (-0.2755, -0.1077)	-2.0888 [0.1522] (-2.3870, -1.7937)	-2.0974 [0.1521] (-2.3896, -1.7944)	-3.4262 [0.37790] (-4.1949, -2.7148)
ϕ	0.9737 [0.0058] (0.9617, 0.9844)	0.7642 [0.0165] (0.7322, 0.7961)	0.7626 [0.0165] (0.7312, 0.7953)	0.6260 [0.0407] (0.5445, 0.7039)
σ_η	0.3148 [0.0270] (0.2630, 0.3671)	1.9064 [0.0467] (1.8140, 1.9979)	1.9366 [0.0454] (1.8475, 2.0255)	1.6596 [0.0674] (1.5308, 1.7917)
ρ	-0.1357 [0.0526] (-0.2393, -0.0339)	-0.0322 [0.0254] (-0.0825, 0.0173)	0.0166 [0.0256] (-0.0352, 0.0648)	-0.0579 [0.0475] (-0.1462, 0.0392)

주) 표는 아래의 왼쪽 식과 같은 이산시간 단기이자율모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언추론 결과를 제시한 것이다. 표에서(,)괄호안의 수치는 95% HPD 구간(highest probability density interval)의 하한과 상한을 나타내며, []안의 수치는 Bandwidth를 500으로 설정하고 다음의 오른쪽과 같은 Parzen kernel을 이용하여 구한 사후표본의 표준편차를 나타낸다. 여기서 Γ_j 는 자기공분산을 나타낸다.

$$\begin{cases} \Delta r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + r_{t-1}^2 \sqrt{z_{t-1}} \epsilon_t \\ \log z_t = \mu + \phi \log z_{t-1} + \eta_t \\ \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \sigma_\eta \\ \rho \sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \end{cases} \quad K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3 & , \quad z \in [0, 1/2] \\ 2(1-z)^3 & , \quad z \in [1/2, 1] \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases} \quad \Gamma = \Gamma_0 + \frac{2B_w}{B_w - 1} \sum_{j=1}^{B_w} K(j/B_w) \Gamma_j$$

[표 5-4] 이산시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(일간)

	TB3M(D) (1954/01/04~2010/06/30)	ED3M(D) (1971/01/04~2010/06/30)	ED1M(D) (1971/01/04~2010/06/30)	KRTB3M(D) (1998/06/01~2010/06/30)
a_0	0.2116×10 ⁻³ [0.0948×10 ⁻³] (0.0388×10 ⁻³ , 0.4058×10 ⁻³)	1.2936×10 ⁻⁸ [3.8381×10 ⁻²²] (1.2936×10 ⁻⁸ , 1.2936×10 ⁻⁸)	1.7114×10 ⁻⁸ [2.9447×10 ⁻²¹] (1.7114×10 ⁻⁸ , 1.7114×10 ⁻⁸)	4.4435×10 ⁻⁶ [4.1335×10 ⁻⁶] (-3.5555×10 ⁻⁶ , 1.2252×10 ⁻⁵)
a_1	-0.1255×10 ⁻³ [0.0883×10 ⁻³] (-0.2924×10 ⁻³ , -9.3300×10 ⁻⁸)	-1.6346×10 ⁻⁷ [2.2711×10 ⁻²⁰] (-1.6346×10 ⁻⁷ , -1.6346×10 ⁻⁷)	-1.7269×10 ⁻⁷ [3.3749×10 ⁻²⁰] (-1.7269×10 ⁻⁷ , -1.7269×10 ⁻⁷)	-6.3258×10 ⁻⁶ [4.7911×10 ⁻⁶] (-1.5480×10 ⁻⁵ , -3.4148×10 ⁻¹⁰)
γ	0.2287 [0.0627] (0.1060, 0.3542)	1.9777 [0.0186] (1.9422, 2.0149)	1.9296 [0.0183] (1.8944, 1.9657)	1.4028 [0.0856] (1.2350, 1.5672)
μ	-0.1787 [0.0227] (-0.2231, -0.1347)	-1.8893 [0.0699] (-2.0256, -1.7514)	-1.5321 [0.0637] (-1.6477, -1.3985)	-2.9578 [0.1605] (-3.2713, -2.6467)
ϕ	0.9795 [0.0026] (0.9744, 0.9843)	0.8297 [0.0059] (0.8186, 0.8419)	0.8594 [0.0054] (0.8490, 0.8699)	0.7558 [0.0129] (0.7302, 0.7807)
σ_η	0.2949 [0.0118] (0.2726, 0.3189)	2.1946 [0.0233] (2.1491, 2.2406)	2.2952 [0.0227] (2.2509, 2.3395)	2.0287 [0.0347] (1.9606, 2.0961)
ρ	-0.0112 [0.0290] (-0.0680, 0.0462)	-0.0183 [0.0117] (-0.0412, 0.0044)	-0.0192 [0.0116] (-0.0426, 0.0034)	-0.0311 [0.0209] (-0.0722, 0.0094)

주) 표는 아래의 왼쪽 식과 같은 이산시간 단기이차율모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언추론 결과를 제시한 것이다. 표에서(,)괄호안의 수치는 95% HPD 구간(highest probability density interval)의 하한과 상한을 나타내며, []안의 수치는 Bandwidth를 500으로 설정하고 다음의 오른쪽과 같은 Parzen kernel을 이용하여 구한 사후표본의 표준편차를 나타낸다. 여기서 Γ_j 는 자기공분산을 나타낸다.

$$\begin{cases} \Delta r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + r_{t-1}^2 \sqrt{z_{t-1}} \epsilon_t \\ \log z_t = \mu + \phi \log z_{t-1} + \eta_t \\ \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \sigma_\eta \\ \rho \sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right) \end{cases} \quad K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3 & , \quad z \in [0, 1/2] \\ 2(1-z)^3 & , \quad z \in [1/2, 1] \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases} \quad \Gamma = \Gamma_0 + \frac{2B_w}{B_w - 1} \sum_{j=1}^{B_w} K(j/B_w) \Gamma_j$$

[표 5-5] 연속시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(주간)

	TB3M(W) (1954/01/08~2010/06/25)	ED3M(W) (1971/01/08~2010/06/25)	ED1M(W) (1971/01/08~2010/06/25)	KRTB3M(W) (1998/06/05~2010/06/25)
κ_1	0.0174 [0.0147] (1.7095×10 ⁻⁶ , 0.0466)	0.3638×10 ⁻³ [0.2760×10 ⁻³] (3.1837×10 ⁻⁸ , 0.8967×10 ⁻³)	0.3739 [0.2910] (2.3366×10 ⁻⁸ , 0.9353×10 ⁻³)	0.0784 [0.0454] (0.9857×10 ⁻³ , 0.1614)
θ_1				
γ	0.4792 [0.0787] (0.3325, 0.6313)	1.9899 [0.0700] (1.8536, 2.1194)	1.4215 [0.0471] (1.3277, 1.5095)	0.8873 [0.1806] (0.5374, 1.2489)
κ_2	1.3629 [0.3025] (0.8090, 1.9937)	12.2612 [0.8583] (10.6040, 13.9243)	12.3445 [0.8604] (10.6406, 13.9770)	19.4430 [2.1160] (15.3922, 23.6846)
θ_2	-3.2869 [0.2422] (-3.7660, -2.8076)	-4.9077 [0.1811] (-5.2535, -4.5413)	-4.8840 [0.1849] (-5.2432, -4.5189)	-5.9091 [1.1279] (-8.0659, -3.6197)
σ_z	2.2706 [0.1948] (1.8971, 2.6470)	13.7476 [0.3370] (13.0806, 14.4068)	13.9655 [0.3280] (13.3227, 14.6066)	11.9681 [0.4861] (11.0392, 12.9201)
ρ	-0.1357 [0.0526] (-0.2393, -0.0339)	-0.0322 [0.0254] (-0.0825, 0.0173)	0.0166 [0.0256] (-0.0352, 0.0648)	-0.0579 [0.0475] (-0.1462, 0.0392)

주) 표는 아래의 왼쪽 식과 같은 연속시간 단기이자율모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언추론 결과를 제시한 것이다. 표에서(,)괄호안의 수치는 95% HPD 구간(highest probability density interval)의 하한과 상한을 나타내며, []안의 수치는 Bandwidth를 500으로 설정하고 다음의 오른쪽과 같은 Parzen kernel을 이용하여 구한 사후표본의 표준편차를 나타낸다. 여기서 Γ_j 는 자기공분산을 나타낸다.

$$\begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\theta_1 - r_t) dt + \exp\left(\frac{Z_t}{2}\right) r_t^\gamma dW_{1t} \\ dZ_t = \kappa_2 (\theta_2 - Z_t) dt + \sigma_z dW_{2t} \\ E_t [dW_{1t} dW_{2t}] = \rho dt \end{cases}$$

$$K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3 & , \quad z \in [0, 1/2] \\ 2(1-z)^3 & , \quad z \in [1/2, 1] \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases} \quad \Gamma = \Gamma_0 + \frac{2B_w}{B_w - 1} \sum_{j=1}^{B_w} K(j/B_w) \Gamma_j$$

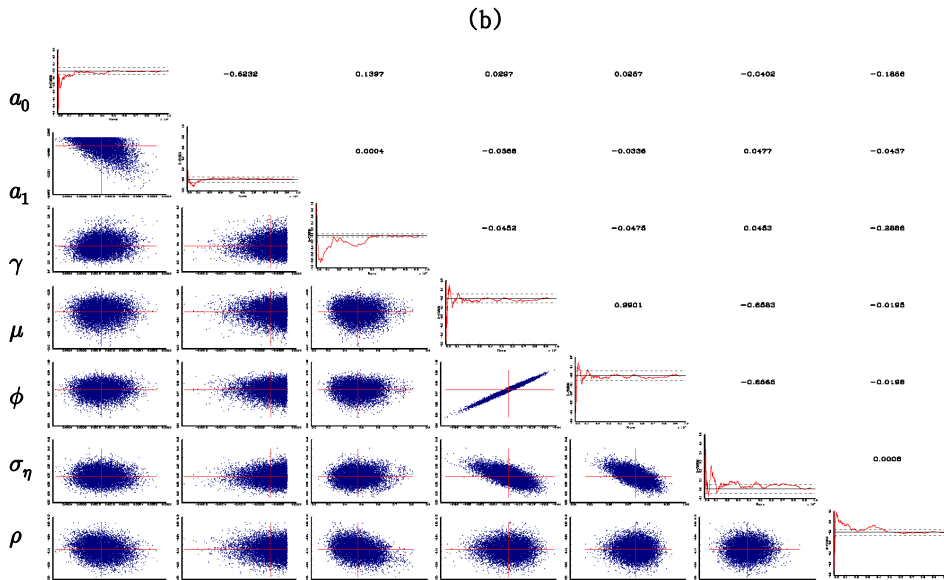
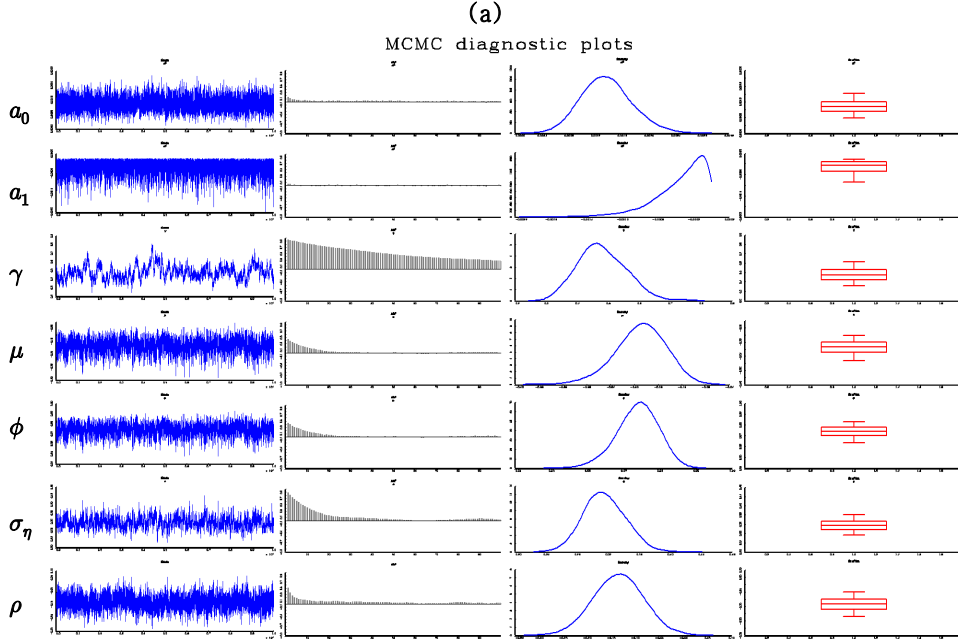
[표 5-6] 연속시간 확률변동성모형에 대한 베이지언추론 결과(일간)

	TB3M(D) (1954/01/04~2010/06/30)	ED3M(D) (1971/01/04~2010/06/30)	ED1M(D) (1971/01/04~2010/06/30)	KRTB3M(D) (1998/06/01~2010/06/30)
κ_1	0.0451 [0.0318] (3.3588×10 ⁻⁵ , 0.1053)	5.8846×10 ⁻⁵ [1.6601×10 ⁻¹⁸] (5.8846×10 ⁻⁵ , 5.8846×10 ⁻⁵)	6.2169×10 ⁻⁵ [6.5052×10 ⁻¹⁹] (6.2169×10 ⁻⁵ , 6.2169×10 ⁻⁵)	0.2277×10 ⁻² [0.1724×10 ⁻²] (1.2293×10 ⁻⁷ , 0.5572×10 ⁻²)
θ_1				
γ	0.2287 [0.0627] (0.1060, 0.3542)	1.9777 [0.0186] (1.9422, 2.0149)	1.9296 [0.0183] (1.8944, 1.9657)	1.4028 [0.0856] (1.2350, 1.5672)
κ_2	7.3707 [0.9251] (5.6422, 9.2206)	61.2959 [2.1463] (56.921, 65.297)	50.6038 [1.9532] (46.8037, 54.3451)	87.9000 [4.6562] (78.9192, 97.1158)
θ_2	-2.8432 [0.1251] (-3.0716, -2.5840)	-5.2099 [0.1302] (-5.4646, -4.9549)	-5.0134 [0.1635] (-5.3354, -4.6858)	-6.2279 [0.1511] (-6.5322, -5.9350)
σ_z	5.5953 [0.2247] (5.1724, 6.0500)	41.6408 [0.4430] (40.7766, 42.5129)	43.5487 [0.4312] (42.7086, 44.3901)	38.4920 [0.6591] (37.2013, 39.7713)
ρ	-0.0112 [0.0290] (-0.0680, 0.0462)	-0.0183 [0.0117] (-0.0412, 0.0044)	-0.0192 [0.0116] (-0.0426, 0.0034)	-0.0311 [0.0209] (-0.0722, 0.0094)

주) 표는 아래의 왼쪽 식과 같은 연속시간 단기이차율모형에 대한 MCMC를 이용한 베이지언추론 결과를 제시한 것이다. 표에서(,)괄호안의 수치는 95% HPD 구간(highest probability density interval)의 하한과 상한을 나타내며, []안의 수치는 Bandwidth를 500으로 설정하고 다음의 오른쪽과 같은 Parzen kernel을 이용하여 구한 사후표본의 표준편차를 나타낸다. 여기서 Γ_j 는 자기공분산을 나타낸다.

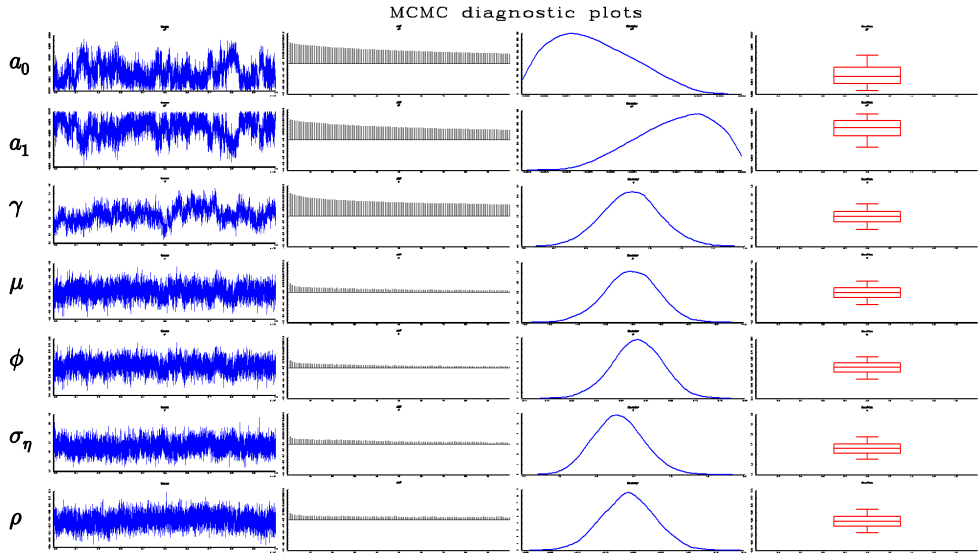
$$\begin{cases} dr_t = \kappa_1 (\theta_1 - r_t) dt + \exp\left(\frac{Z_t}{2}\right) r_t^\gamma dW_{1t} \\ dZ_t = \kappa_2 (\theta_2 - Z_t) dt + \sigma_z dW_{2t} \\ E_t [dW_{1t} dW_{2t}] = \rho dt \end{cases} \quad K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3 & , \quad z \in [0, 1/2] \\ 2(1-z)^3 & , \quad z \in [1/2, 1] \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases} \quad \Gamma = \Gamma_0 + \frac{2B_w}{B_w - 1} \sum_{j=1}^{B_w} K(j/B_w) \Gamma_j$$

[그림 5-5] 파라미터에 대한 베이지언추론 결과
(TB3M(W) : 1954/01/08~2010/06/25)

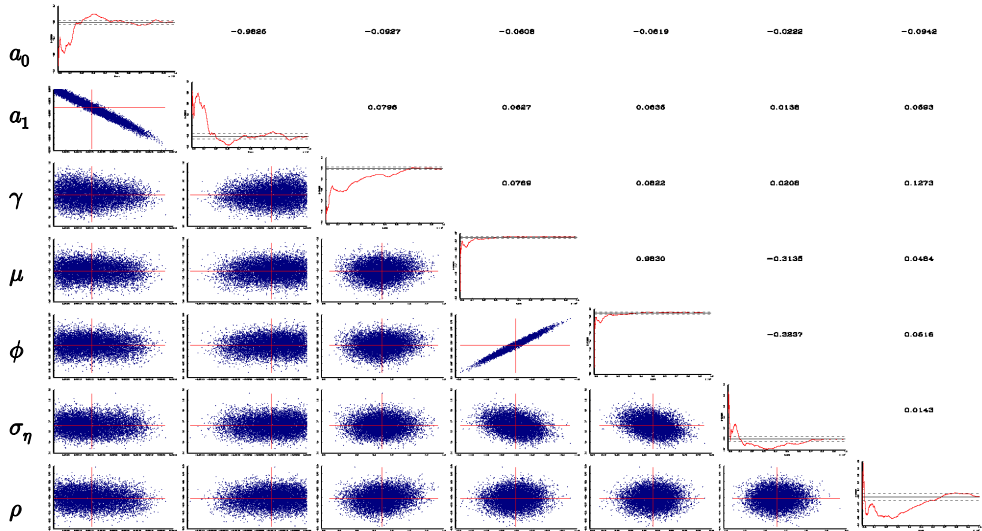


주) 그림의 결과는 베이지언추론을 통해 얻은 모형의 파라미터들의 사후표본에 대한 분석이다. (a)패널의 각 행은 사후 표본추출된 파라미터의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관계수, 커널확률 밀도(kernel density) 그리고 박스플롯(box plot)을 나타낸다. (b)패널의 대각 성분은 각 파라미터의 사후표본의 수렴여부를 평가하기 위하여 정규화된 CUSUM플롯을 도시한 것이며, 비대각성분은 사후표본들의 산포도와 상관계수를 나타낸다.

[그림 5-7] 파라미터에 대한 베이지언추론 결과
(KRTB3M(W) : 1998/06/05~2010/06/25)
(a)

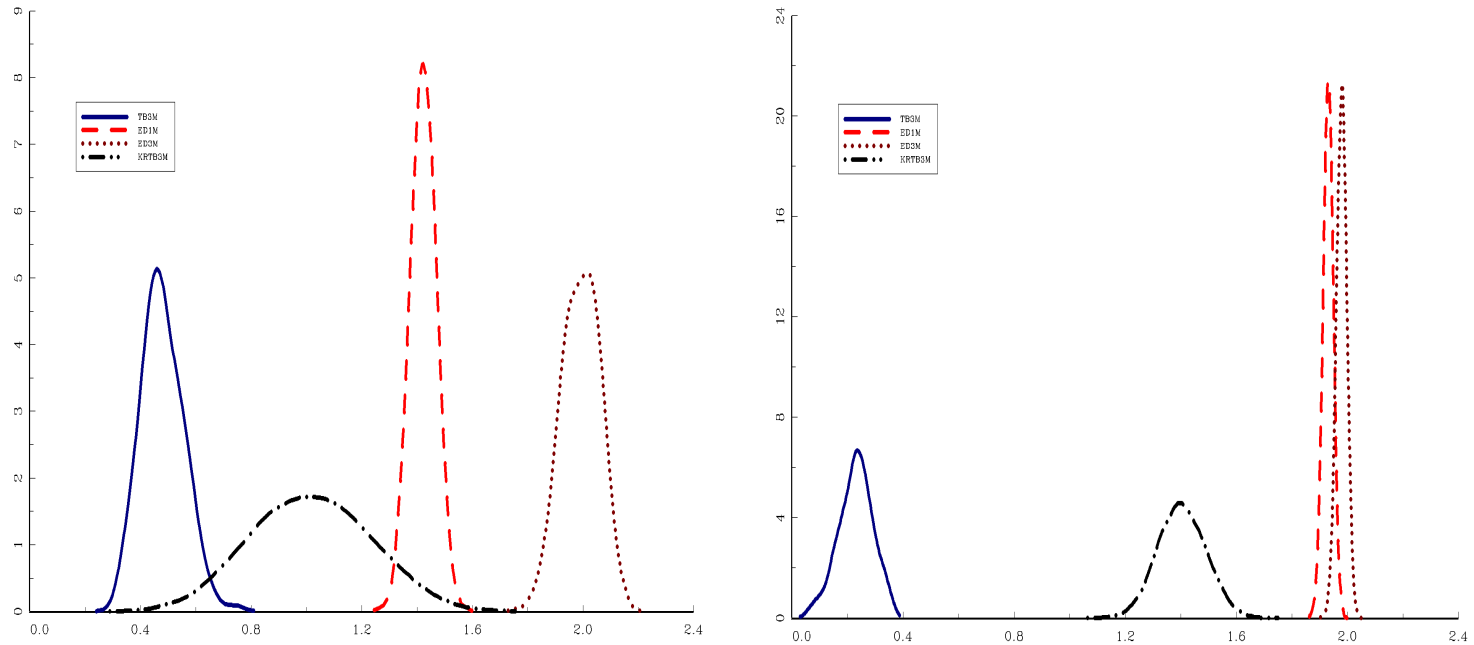


(b)



주) 그림의 결과는 베이지언추론을 통해 얻은 모형의 파라미터들의 사후표본에 대한 분석이다.(a)패널의 각 행은 사후 표본추출된 파라미터의 트레이스플롯(trace plot), 자기상관계수, 커널확률밀도(kernel density) 그리고 박스플롯(box plot)을 나타낸다.(b)패널의 대각 성분은 각 파라미터의 사후표본의 수렴여부를 평가하기 위하여 정규화된 CUSUM플롯을 도시한 것이며, 비대각성분은 사후표본들의 산포도와 상관계수를 나타낸다.

[그림 5-8] 수준효과 파라미터 γ 의 조건부 사후확률분포 비교
 <주간자료에 대한 베이지언추론 결과> <일간자료에 대한 베이지언추론 결과>



주) 그림은 단기이자율 확률변동성모형에 대한 베이지언추론을 통해 얻어진 수준효과 파라미터 γ 의 사후표본 커널확률밀도함수를 도식한 것이다. 그림에서 좌측과 우측 에는 각각 주간자료와 일간자료에 대한 분석을 통해 얻은 γ 의 커널확률밀도함수가 도식되어 있다. 그림에서 각각 실선은 3개월만기 미국재무부채권이이자율, 긴 점선은 1개월만기 유로달러이자율, 짧은 점선은 3개월만기 유로달러이자율, 1점 쇄선은 한국의 잔존만기 3개월 국채수익률 자료에 대한 분석에서 사후표본추출된 γ 의 커널확률밀도함수를 나타낸다.

제 6 장 결론

본 연구에서는 시장에서 관측되는 이자율기간구조의 전형적인 특성을 가운데 조건부이차적률 특히 시변조건부변동성의 지속성과 수준효과를 중심으로 이자율 기간구조모형의 설정에 대한 유효성을 분석해 보았다. DS의 ATSM, ADG의 QTSM, AG의 ISRM 등은 단기이자율을 상태변수로 하는 단일모형을 미관측상태변수를 포함하는 다요인 모형으로 확장한 모형이지만 이자율기간구조의 전형적인 특성을 설명하기 위한 단일요인 모형의 특성은 그대로 유지하고 있다. 채권가격의 해석해가 얻어질 수 있고 다루기 용이하다는 특성으로 인하여 자주 이용되는 ATSM, QTSM, ISRM 등은 시변조건부변동성의 지속성을 파악하는 측면에서는 큰 차이가 없으나 조건부변동성이 상태변수의 수준에 의존하는 정도인 수준효과 측면에서는 상당한 차이를 보인다. 이처럼 서로 상이한 수준효과를 가지는 모형들이 얼마나 효과적으로 확률변동성의 전형적인 특성을 반영할 수 있는지를 살펴보기 위하여 수준효과와 강도를 파라미터로 포함하는 일반적인 단기이자율 확률변동성모형을 설정하고 이를 추정하기 위한 새로운 베이지언추론 알고리즘을 제시하였다. 새롭게 제시된 베이지언추론 알고리즘을 이용하여 3개월 만기 미재무부채권수익률, 1개월 및 3개월 만기 유로달러이자율 그리고 잔존만기 3개월 한국국채수익률의 주간 및 일간자료를 이용하여 단기이자율 확률변동성모형에 파라미터로 포함된 수준효과와 크기에 대한 실증분석을 수행하였다.

분석의 결과는 다음과 같다. 3개월 만기 미국재무부채권이자율에 대한 분석에서 추정된 수준효과는 ATSM에서 설정된 크기에 가까운 것으로 나타났으며, 1개월 만기 유로달러이자율 주간자료에 대한 분석에서는 ATSM이나 QTSM보다 ISRM에서 설정된 수준효과에 가까운 것으로 나타났다. 그리고 3개월 만기 유로달러이자율 주간 및 일간자료와 1개월 만기 유로달러이자율 일간자료에 대한 분석에서는 ISRM에서보다 더 높

은 수준효과가 존재하는 것으로 나타났다. 잔존만기 3개월 한국의 국채 수익률 주간자료에 대한 분석에서는 수준효과의 크기가 ATSM보다 QTSM에서 설정된 값에 가까웠지만, 일간자료의 분석에서는 ISRM에서 설정된 값에 가까운 것으로 나타났다.

이러한 결과는 한국의 국채에 대한 이자율의 기간구조를 분석 할 때 ATSM은 조건부이차적률의 동태적인 특성을 포착하는데 적절하지 않을 수 있다는 것을 시사한다. 실증분석을 통해서 살펴본 바와 같이 매우 상이한 확률변동성의 수준효과는 일반적으로 이용되는 ATSM, QTSM, ISRM 등의 설정이 가지는 조건부이차적률의 특성을 설명하는 능력과 밀접한 관련이 있다. 그러므로 시장에서 관측되는 이자율기간구조의 특성과 분석목적을 고려한 이자율 기간구조모형의 선택이 요구된다. 그리고 상대적으로 부족한 기존 모형의 조건부이차적률에 대한 적합성 평가와 함께 기존 모형이 포착하기 어려운 2차이상의 조건부적률의 특성을 충분히 반영할 수 있는 새로운 이자율 기간구조모형에 대한 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

김태형, “시뮬레이션을 이용한 이산 시간 확률 변동성 모형 추정에 관한 연구 - MCMC를 이용한 베이지언추론 방법을 중심으로,” 서울대학교, 2005.

Ahn, D-H. and B. Gao (1999), A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics, *Review of Financial Studies*, 12, 721-762.

Ahn, D-H., R. Dittmar A. Gallant (2002), Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence, *Review of Financial Studies*, 15, 243-288.

Ahn, D-H., R. Dittmar, A. Gallant and B. Gao (2003), Purebrid or Hybrid? Reproducing the Volatility in Term Structure Dynamics, *Journal of Econometrics*, 116, 147-180.

Ait-Sahalia, Y. (1996), Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate, *Review of Financial Studies*, 9(2), 385-426.

_____ (2002), Maximum-Likelihood Estimation of Discretely-Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach," *Econometrica*, 70, 223-262.

Ang, A., G. Bekaert and M. Wei (2008), The Term Strcture of Real Rates and Expected Inflation, *Journal of Finance*, 63, 797-843.

Ang, A., A., J. Bovine and S. Dong (2008), Monetary Policy Shifts and the Term Structure, *Working Paper*

Ang, A., and M. Piazzesi (2003). A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables, *Journal of Monetary Economics* 50, 745-787.

Ang, A., S. Dong and M. Piazzesi (2007), No-Arbitrage Taylor Rules, NBER

Working Paper No. W13448.

Andersen, T. G and J. Lund (1997), Estimating Continuous time Volatility Models of short-term interest rate, *Journal of Econometrics*, 77, 343-377.

_____ (1998), Stochastic Volatility and Mean Drift in the Short Term Interest Rate Diffusion: Sources of Steepness, Level and Curvature in the Yield Curve. Working Paper, Northwestern University.

Andersen, T., L. Benzoni, and J. Lund (2004), Stochastic Volatility, Mean Drift, and Jumps in the Short-Term Interest Rate, Working Paper

Andersen, T. G. and B. E. Sørensen (1996), GMM estimation of a stochastic volatility model: A Monte Carlo study, *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 328-352.

_____ (1997), GMM and QML asymptotic standard deviations in stochastic volatility models: A comment on Ruiz (1994), *Journal of Econometrics*, 76, 397-403.

Babbs, S. H. and K. B. Nowman (1999), Kalman Filtering of Generalized Vasicek Term Structure Models, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34, 115-130.

Balduzzi, P., S. Das, S. Foresi and R. Sundram (1996), A Simple Approach to Three Factor Affine Term Structure Models, *Journal of Fixed Income*, 6, 43-53.

Ball, C. A., and W. N. Torous (1996), Unit roots and the estimation of interest rate dynamics, *Journal of Empirical Finance* 3, 215-238.

Ball, C. A. and W. N. Torous (1999), The Stochastic Volatility of Short-Term Interest Rates: Some International Evidence, *Journal of Finance*, 54, 6, 2339-2359.

- Bansal, R., G. Tauchen and H. Zhou (2004), Regime Shifts, Risk Premiums in the Term Structure and Business Cycles, *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, 396-409.
- Bansal, R. and H. Zhou (2002), Term Structure of Interest Rates with Regime Shifts, *Journal of Finance* 57, 1997-2043.
- Bauwen, L. and M. Lubrano (1998), Bayesian inference on GARCH models using the Gibbs sampler, *Econometrics Journal*, 1, C23-C46.
- Beaglehole, D. R and M. S. Tenney (1991), General Solutions of Some Interest Rate Contingent Claim Pricing Equations, *Journal of Fixed Income*, 1, 69-83.
- Brennan, M. J. and E. S. Schwartz (1977), Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds, *Journal of Financial Economics*, 5, 67-88.
- Billio, M. and A. Monfort (1998), Switching state space models: likelihood, filtering and smoothing, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 68(1), 65-103.
- Billio, M., A. Monfort A. and C. P. Robert (1998), The simulated likelihood ratio (SLR) method, *Document de Travail du CREST* 9828, Paris.
- Bikbov, R. and M. Chernov (2011), Yield Curve and Volatility: Lessons from Eurodollar Futures and Options, *Journal of Financial Econometrics*, 9(1), 66-105.
- Bliss, R. and D. C. Smith (1998), The Elasticity of Interest Rate Volatility: Chan, Karolyi, Longstaff, and Sanders Revisited, *Journal of Risk*, 1(1), 21-46.
- Brand, M. W. and P. Santa-clara (2002), Simulated Likelihood Estimation of Diffusions with an Application to Exchange Rate Dynamics in Incomplete Markets, *Journal of Financial Economics*, 63, 161-201.

- Brandt, M. W. and P. He (2006), Simulated Likelihood Estimation of Affine Term Structure Models from Panel Data, Working paper
- Brigio, D. and F. Mercurio (2007), Interest Rate Models Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit, 2nd Edition, Springer.
- Brennan, M. J. and E. S. Schwartz (1977), Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds, *Journal of Financial Economics*, 5, 67-88.
- Brown, S. J. and P. H. Dybvig (1986), Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Finance* 41, 143-172.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. MacKinlay (1997), The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press.
- Canabarro, E. (1995), Where do One-Factor Models Fail?, *Journal of Fixed Income*, September, 31-52.
- Carlin, B. P., N. G. Polson, D. S. Stoffer (1992), A Monte Carlo approach to nonnormal and nonlinear state space modelling, *Journal of the American Statistical Association*, 87, 493-500.
- Carter, C. K. and R. Kohn (1994), On Gibbs sampling for state space models, *Biometrika*, 81, 541-553.
- Chan, K. C., A. Karolyi, F. A. Longstaff and A. B. Sanders (1992), An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate, *Journal of Finance*, 47, 1209-1227.

- Chan, K. S. and J. Ledholter (1995), Monte Carlo EM estimation for time series models involving counts, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 242-252.
- Chen, L. (1996), Stochastic Mean and Stochastic Volatility - A Three Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivative, *Blackwell Publishers*.
- Chen, R. and L. Scott (1992), Pricing Interest Options in a Two-Factor Cox-Ingersol-Ross Model of the Term Structure, *Review of Financial Studies*, 5, 613-636.
- _____ (1993), Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Fixed Income* 3, 14-31
- _____ (2003), Multifactor Cox-Ingersoll-Ross models of the term structure: Estimates and tests from a Kalman filter model, *Journal of Real Estate Finance and Economics* 27, 143-172.
- Chen, L. (1996), Stochastic Mean and Stochastic Volatility – A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives, *Oxford Blackwell*.
- Chen, R-R., X. Cheng, F. J. Fabozzi and B. Liu (2008), An Explicit, Multi-Factor Credit Default Swap Pricing Model with Correlated Factors, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 43, 123-160.
- Cheng, P. and O. Scaliliet (2007), Linear-Quadratic Jump-Diffusion Modelling, *Mathematical Finance*, 17, 575-598.
- Cheridito, P., D. Filipovic and R. Kimmel (2007), Market Price of Risk Specifications for Affine Models: Theory and Evidence, *Journal of Financial Economics*, 83, 123-170.
- Chib, S. and B. Ergashev (2009), Analysis of Multi-Factor Affine Yield Curve

- Models, *Journal of American Statistical Association*, 104, 1324-1337.
- Chib. S. and E. Greenberg (1998), Analysis of Multivariate Probit Models, *Biometrika*, 85, 347-361.
- Chib, S., F. Nardari and N. Shephard (2002), Markov Chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models, *Journal of Econometrics*, 108, 281-316.
- Christoffersen, P., K. Jacobs, L. Karoui and K. Minouni (2009), Non-Linear Filtering in Affine Term Structure Models: Evidence from the Term Structure of Swap Rates, Working Paper.
- Cochrane, J. R. (2001), Asset Pricing, *Princeton University Press*
- Collin-Dufresne, P., R. S. Goldstein and C. S. Jones (2008), Identification of Maximal Affine Term Structure Models, *The Journal of Finance*, 63(2), 743-795.
-
- (2009), Can interest rate volatility be extracted from the cross section of bond yields?, *Journal of Financial Economics*, 94, 47-66.
- Conley, T. G., L. P. Hansen, E. G. J. Luttmer, and J. A. Scheinkman, (1997), Short-term interest rates as subordinated diffusions, *Review of Financial Studies*, 10, 525-577.
- Constantinides, G. (1992), A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates, *Review of Financial Studies* 5, 531-552.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, 385-407.
- Dai, Q. and K. Singleton (2000), Specification Analysis of Affine Term Structure

- Models, *Journal of Finance* 55, 1943-1978.
- Dai, Q. and K. Singleton (2003), Term Structure Dynamics in Theory and Reality, *Review of Financial Studies*, 16, 631-678.
- Dahlquist, M. (1996), On alternative interest rate processes, *Journal of Banking and Finance*, 20, 1093-1119.
- Danielsson, J. (1994), Stochastic volatility in asset prices: estimation with simulated maximum likelihood, *Journal of Econometrics*, 61, 375-400.
- Danielsson, J. and J. Richard (1993), Accelerated Gaussian importance sampler with application to dynamic latent variable models, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 153-173.
- De Jong, Frank (2000), Time-series and cross-section information in affine term structure models, *Journal of Business and Economic Statistics* 18, 300-314.
- De Jong F and P. Santa-Clara (1999), The Dynamics of the Forward Interest Rate curve: A formulation with State Variables, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, 131-157.
- De Jong, P. and N. Shephard (1995), The simulation smoother for time series models, *Biometrika*, 82, 339-350.
- Dothan, U. L. (1978), On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, 6, 59-69.
- Dridi, R. and E. Renault (2000), Semi-parametric indirect inference, Working Paper 392, London School of Economics - Suntory Toyota, Econometrics.
- Duan, J. and J. Simonato (1999), Estimating and Testing Exponential-Affine Term Structure Models by Kalman Filter, *Review of Quantitative Finance and*

Accounting 13, 111-135.

Duarte, J. (2004), Evaluating an Alternative Risk Preference in Affine Term Structure Models, *Review of Financial Studies*, 17, 379-404.

Duffee, G. (2002), Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models, *Journal of Finance*, 57, 405-443.

Duffie, D. (2001), Dynamic Asset Pricing Theory, 3rd Edition, Princeton University Press.

Duffie, D. and R. Kan (1996), A Yield Factor Model of Interest Rate, *Mathematical Finance*, 6, 379-406.

Duffie, D., L. Pedersen, and K. Singleton (2003), Modeling Credit Spreads on Sovereign Debt: A Case Study of Russian Bonds, *Journal of Finance* 55, 119-159.

Duffie, D., J. Pan and K. Singleton (2000), Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions, *Econometrica*, 68, 1343-1376.

Duffie, D. and K. Singleton (1993), Simulated moments estimation of Markov models of asset prices, *Econometrica*, 61, 929-952.

Duffie, D. and K. Singleton (1997), An Econometric Model of the Term Structure of Interest Rate Swap Yields, *Journal of Finance* 52, 1287-1321.

Durbin, J. and S. Koopman (1997), Monte Carlo maximum likelihood estimation for non - Gaussian state space models, *Biometrika*, 84, 669-684.

(2000), Time series analysis of non-Gaussian observations on state space models from both classical and Bayesian perspectives, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 62, 3-56.

-
- _____ (2002), A Simple and efficient simulation smoothers for state space time series analysis, *Biometrika*, 89, 603-615.
- Durham, G. B. and A. R. Gallant (2002), Numerical techniques for maximum likelihood estimation of continuous time diffusion processes, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 297-316.
- Elerian, O., S. Chib and N. Shepard (2001), Likelihood Inference for Discretely Observed Nonlinear Diffusions, *Econometrica*, 69, 959-993.
- Eraker, B. (2001), MCMC Analysis of Diffusion Models with Application to Finance, *Journal of Business and Economics Statistics*, 19, 177-191.
- Fackler, P. (2000), Moments of Affine Diffusions, North Carolina State University Working Paper
- Fisher, M. and C. Gilles (1996), Estimating Exponential Affine Models of the Term Structure, Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Fong, H. G. and O. A. Vasicek (1991), Fixed Income Volatility Management, *Journal of Portfolio Management*, Summer, 41-46.
- Frühwirth-Schnatter, S. (1994), Data augmentation and Dynamic Linear Models, *Journal of Time Series Analysis*, 15, 183-202.
- Frühwirth-Schnatter, S. and A. L. J. Geyer (1998), Bayesian estimation of econometric multifactor Cox Ingersoll Ross models of the term structure of interest rates via MCMC methods, Working Paper.
- Gallant, A. R. and J. Long (1997), Estimating stochastic differential equations efficiently by minimum chi-square, *Biometrika*, 84, 125-141.

Gallant, A. R., D. Hsieh and G. Tauchen (1997), Estimation of stochastic volatility models with diagnostics, *Journal of Econometrics*, 81, 159-192.

Gallant, A. R. and G. Tauchen (1996), Which Moments to Match, *Econometric Theory*, 12, 657-668.

_____ (2009), SNP: A Program for Nonparametric Time Series Analysis, Version 9.0 User's Guide 1

_____ (2010), EMM: A Program for Efficient Method of Moments Estimation, Version 2.6, User's Guide

Genton, M. G. and E. Ronchetti (2003), Robust Indirect Inference, *Journal of the American Statistical Association*, 98, 67-76.

Geweke, J. (1991), Efficient Simulation from the Multivariate Normal and Student-t Distributions Subject to Linear Constraints and the Evaluation of Constraint Probabilities, *Computing Science and Statistics: Proceedings of the Twenty-Third Symposium on the Interface*, 571-578.

Geweke, J. and H. Tanizaki (2001), Bayesian estimation of state-space models using the Metropolis-Hastings algorithm within Gibbs sampling, *Computational Statistics and Data Analysis*, 37, 151-170.

Geyer, C. (1994), On the convergence of Monte Carlo maximum likelihood calculations, *Journal of the Royal Statistical Society*, B 65, 261-274.

_____ (1996), Estimation and optimization of functions, *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, 241-258.

Geyer, A. and S. Pichler (1996), A state space approach to estimate the term structure of interest rates: some empirical evidence, Working Paper, University of Economics, Vienna

- Gibbons, M. R. and K. Ramaswamy (1993), A Test of the Cox, Ingersoll, and Ross Model of the Term Structure, *Review of Financial Studies* 6, 619-658.
- Gouriéroux, C., A. Monfort and E. Renault (1993), Indirect inference, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 85-118.
- Hansen, L. P. (1982), Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators, *Econometrica*, 50, 1029-1054.
- Hansen, L. and J. Scheinkman (1995), Back to the Future: Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes, *Econometrica* 63, 767-804.
- Harvey, A. C., E. Ruiz and N. Shephard (1994), Multivariate stochastic variance models, *Review of Economic Studies*, 61, 247-264.
- Hürzeler, M. and H. R. Kunsch (1998), Monte Carlo Approximations for General State-Space Models, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7, 175-193.
-
- (2000), Approximating and Maximizing the Likelihood for a General State-Space Model in Sequential Monte Carlo Methods in Practice Doucet, A., N. De Freitas and N. Gordon eds. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 159-175.
- Gong, F. F. and E. M. Remolona (1996), A Three-factor Econometric Model of the U.S. Term Structure, Federal Reserve Bank of New York, Research Paper, No. 9619.
- Ingersoll, J. E. (1987), Theory of Financial Decision Making, Rowman and Littlefield
- Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi (1994), Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 69-87.

-
- (2004), Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors, *Journal of Econometrics*, 122, 185-212.
- Jagadeh, N. and G. G. Pennacchi (1996), The Behavior of Interest Rate Implied by the Term Structure of Euro-Dollar Futures, *Journal of Money, Credit and Banking*, 28, 426-446.
- Jagannathan, R., A. Kaplin and S. Sun (2003) An Evaluation of Multi-factor CIR Models Using LIBOR, Swap Rates, and Cap and Swaption Prices, *Journal of Econometrics*, 116, 113-146.
- Jones, C. S. (2003), Nonlinear Mean Reversion in the Short-Term Interest Rate, *Review of Financial Studies*, 16, 793-843.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1991), Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, NY.
- Kim, S., N. Shepard and S Chib (1998), Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models, *Review of Economic Studies*, 65, 361-393.
- Kitagawa, G. (1987), Non-Gaussian state space modeling of nonstationary time series (with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, 82, 1032-1063.
- Kramer, S. C. and H. W. Sorensen (1988), Recursive Bayesian estimation using piece-wise constant approximations, *Automatica*, 24, 789-801.
- Kwok, Y-K. (2008), Mathematical Models of Financial Derivatives, 2nd Edition, Springer.
- Lamoureux C. G. and H. D. Whitte (2002), Empirical Analysis of the Yield Curve:

The Information in the Data Viewed through the Window of Cox, Ingersoll, and Ross, *Journal of Finance*, 57, 1479-1520.

Laroque, G. and B. Salanié (1993), Simulation-based estimation of models with lagged latent variables, *Journal of Applied Econometrics*, 8, S119-S133.

Leippold, M. and L. Wu (2002), Asset Pricing under the Quadratic Class, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 271-295.

Leippold, M. and L. Wu (2007), Design and Estimation of Multi-Currency Quadratic Models, *Review of Finance* 11, 167-207.

Linardakis, M. and P. Dellaportas (1999), Bayesian Analysis of latent utilities for transportation services via extensions of the multinomial probit model, Working paper, Athens University of Economics and Business.

(2003), Assessment of Athens' metro passenger behaviour via a multi-ranked probit model, *Journal of Royal Statistical Society*, Series C, 52(2), 185-200.

Lisenfeld, R. and J. F. Richard (2003), Univariate and multivariate stochastic volatility models: estimation and diagnostics, *Journal of Empirical Finance*, 10, 505-531.

Liu, J. S., W. H. Wong and A. Kong (1994), Covariance structure of the Gibbs sampler with application to the comparisons of estimators and augmentation schemes, *Biometrika*, 81, 27-40.

Longstaff, F. A. (1989), A nonlinear general equilibrium model of the term structure, *Journal of Financial Economics* 23, 195-224.

Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz (1992), Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model, *Journal of Finance*, 47, 1259-1282.

- Lund, J. (1997), Non-Linear Kalman Filtering Techniques for Term Structure Models, Working Paper, Aarhus School of Business.
- _____ (1999), A Model for Studying the Effect of EMU on European Yield Curves, *European Financial Review*, 2, 321-363.
- Mahieu, R. and P. Schotman (1998), An empirical application of stochastic volatility models, *Journal of Applied Econometrics*, 16, 333-359.
- Mariano, R. S. and H. Tanizaki (1995), Prediction of Final Data with Use of preliminary and/or Revised Data, *Journal of Forecasting*, 14, 351- 380.
- Melino, A. and S. M. Turnbull (1990), Pricing foreign currency options with stochastic volatility, *Journal of Econometrics*, 45, 239-265.
- Mikkelsen, P. (2002), MCMC based estimation of term structure models, Working Paper, Department of Finance, The Aarhus School of Business, Denmark.
- Musiela, M. and M. Rutkowski (2004), Martingale Methods in Financial Modelling, Springer-Verlag, NY.
- Nielsen, L. T. (1999), Pricing and Hedging of Derivative Securities, Oxford University Press.
- Nobile, A. (2000), Comment: Bayesian multinomial probit models with a normalization constraint, *Journal of Econometrics*, 99, 335-345.
- Pearson, N. D. and T. Sun (1994), Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model, *Journal of Finance*, 49, 1279-1304.
- Pedersen, A. R. (1995), A new approach to maximum likelihood estimation for

stochastic differential equations based on discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*. 22, 55-71.

Pennacchi, G. G. (1991), Identifying the dynamics of real interest rates and inflation: Evidence using survey data, *Review of Financial Studies*, 4, 53-86.

Pitt, M. K. and N. Shephard (1996), Joint and Antithetic MCMC For Non-Gaussian Measurements With Applications to Stochastic Volatility, Working Paper.

_____ (1997), Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series, *Biometrika*, 84, 653-667.

Pitt, M. K. (2002), Smooth particle filters for likelihood evaluation and maximization, Warwick economic research papers No. 651.

Platen, E. and D. Heath (2006), A Benchmark Approach to Quantitative Finance, Springer.

Sandmann, G. and S. Koopman (1998), Estimation of stochastic volatility models via Monte Carlo maximum likelihood, *Journal of Econometrics*, 87, 271-301.

Selby, M. J. P. and C. R. Strickland (1991), Computing the Fong and Vasicek Pure Discount Bond Price Formula, *Journal of Fixed Income*, September, 78-84.

Shephard, N. (1993), Fitting non-linear time series models, with applications to stochastic variance models, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 135-152.

_____ (1994), Partial non Gaussian state space, *Biometrika*, 81, 115-131.

Shephard, N. and M. K. Pitt (1997), Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series, *Biometrika*, 84, 653-667.

- Singleton, K. (2001), Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the Empirical Characteristic Function, *Journal of Econometrics* 102, 111-141.
- Singleton, K. (2006), Empirical Dynamic Asset Pricing, Princeton University Press
- Smith, A. A. (1993), Estimating non linear time series models using simulated vector autoregressions, *Journal of Applied Econometrics*, 8, S63-S84.
- Smith, D. R. (2002), Markov-Switching and Stochastic Volatility Diffusion Models of Short-Term Interest Rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 183-197.
- Sögner, L. (2009), Bayesian Analysis of Affine Term Structure Models Working Paper, Institute for Advanced Studies(IHS)
- Sanford, A. D. and G. M. Martin (2005), Simulation-based Bayesian estimation of an affine term structure model, *Computational Statistics and Data Analysis*, 49, 527-554.
- Stanton, R. (1997), A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk, *Journal of Finance* 52, 1973-2002.
- Tang, H. and Y. Xia (2007), An international examination of a term structure models and the expectations hypothesis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 42 (1), 41-80.
- Tanizaki, H. (1993), Nonlinear Filters: Estimation and Applications (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 400), Springer-Verlag.
- _____ (1996), *Nonlinear Filters: Estimation and Applications*, 2nd Edition,

Springer-Verlag, Berlin.

_____ (1997), Nonlinear and nonnormal filters using Monte Carlo methods, *Computational Statistics and Data Analysis*, 25, 417-439.

_____ (1999), On Nonlinear and Nonnormal Filters Using Rejection Sampling, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 1-6.

_____ (2001), Estimation of unknown parameters in nonlinear and non-Gaussian state-space models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 96, 301-323.

_____ (2003), Nonlinear and Non-Gaussian State-Space Modeling with Monte Carlo Techniques: A Survey and Comparative Study, *Handbook of Statistics, Vol .2, Stochastic Processes: Modeling and Simulation*, Chap. 22, 871-929. (C. R. Rao and D. N. Shanbhag, Eds, North-Holland.)

Tanizaki, H. and R. Mariano (1994), Prediction, filtering and smoothing in non-linear and non-normal cases using Monte Carlo integration, *Journal of Applied Econometrics*, 9, 163-179.

_____ (1998), Nonlinear and non-Gaussian state-space modeling with Monte Carlo stochastic simulation, *Journal of Econometrics*, 83, 263-290.

Tauchén, G. (1997), New minimum chi-square methods in empirical finance, in: *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Seventh World Congress*, Cambridge University Press, Cambridge.

Vasicek, O. A. (1977), An Equilibrium Characterization of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

Yu, B. and P. Mykland (1998), Looking at Markov samplers through CUSUM path plots: a simple diagnostic idea, *Statistics and Computing*, 8, 275-286.

II 이산시간 이자율 기간구조모형

제 1 장 서론

지금까지 개발된 이자율 기간구조모형은 분석방법에 따라 균형모형(equilibrium model)과 차익거래모형(arbitrage model)으로, 시간분할에 따라 연속시간모형(continuous time model)과 이산시간모형(discrete time model)으로 크게 구분될 수 있다.

균형모형에서는 완전시장의 가정 하에서 상태변수의 확률과정을 설정하고 무차익조건(no arbitrage condition)을 충족시키는 무이표채의 가격을 도출하여 이로부터 이론적인 이자율의 기간구조를 제시한다. 이와 달리 차익거래모형에서는 현재의 이자율기간구조(또는 채권가격)를 관측하고 이와 양립하는 미래의 기간구조를 도출하여 이를 이자율파생상품의 가격을 결정하는데 이용하고자 한다. 여기서 ‘양립’이란 차익거래가 불가능하다는 의미이다. 대부분의 균형모형에서는 상태변수의 확률과정에서 나타나는 파라미터가 시간에 따라 변화하지 않는 상수(constant)인 반면, 차익거래모형에서는 상응하는 파라미터가 시간에 따라 변화하는(time-varying) 특징을 가지고 있다.

한편, 이자율 기간구조모형은 상태변수가 따르는 확률과정의 시간분할에 따라 각각 연속시간모형과 이산시간모형으로 구분될 수 있다. CIR(1985), Longstaff and Schwartz(1992) 등을 제외한 대부분의 연속시간모형에서는 확률할인요인(stochastic discount factor: 이하 SDF)이 외생적으로 주어지는 확률과정(stochastic process)을 따르는 상태변수의 함수로 설정되며, 이로부터 채권가격의 해석해(analytical solution)가 도출된다. 이는 완성시장(complete market)의 가정 하에서 차익거래를 불가능하게 하는 유일한 양(+)의 SDF가 존재한다는 Harrison and Kreps(1979)와

Harrison and Pliska(1981)의 연구결과를 바탕으로 하고 있다. 이와 같이 이자율기간구조를 연속시간 하에서 다루는 것이 유리한 점도 있지만, 현실에서 관측되는 채권수익률 자료들이 이산시간 단위로 관측되므로 실증분석에서 연속시간모형을 이용하여 여러 경제변수들을 추정하는 것이 어려울 수 있으며, 추정모형의 활용에서도 한계가 있을 수 있다. 특히, 거시금융모형(macro-finance model)의 경우에는 투자자의 효용함수·부존자원·소비증가율·생산기술 등의 경제변수를 반영하는 일반균형(general equilibrium) 하에서 이자율기간구조를 도출하게 되는데, 이 때 연속시간 하에서 일반화된 모형을 도출하는 것은 쉽지 않다. 또한, 모형 추정에 있어 미관측상태변수의 해석적인 전이확률밀도함수(analytical transition probability density)를 얻는 것이 쉽지 않고 연속시간 확률과정을 이산화(discretization)하는 과정을 거쳐야 한다. 이와 같이 연속시간모형은 채권가격의 해석해를 구하기 쉽지만 이산시간자료를 사용한 실증분석에는 적절하지 않은 모형이라 할 수 있다.

실증분석에 이용되는 자료는 이산시간을 바탕으로 하고 있으므로 투자자 또는 정책당국의 의사결정 또한 이산시간 단위로 이루어진다. 따라서 이러한 사실을 반영할 수 있는 다양한 이산시간 이자율 기간구조모형도 꾸준히 개발되고 발전되어 왔다. 이산시간모형은 크게 두 가지로 구분될 수 있다. 하나는 연속시간 확률과정을 단순히 이산화한 ‘연속시간상사 이산시간모형(continuous time analog)’이며, 다른 하나는 상태변수가 Car 과정(compound autoregressive process)이라고 하는 이산시간 지수선형과정을 따르는 ‘정확한 이산시간모형(exact discrete time model)’이다. 이산화모형은 연속시간모형에서 Feller조건이 성립한다고 하더라도 이를 이산화한 모형에서는 성립하지 않을 수 있고, Feller조건이 성립하지 않는 경우에도 비음(non-negative)의 상태변수를 가질 수 있게 된다. 또한, 연속시간 확률과정을 따르는 상태변수의 이산시간 전이확률밀도함수를 해석적인 형태로 얻는 것이 가능하지 않을 수 있다. 이와 달리 Dai et al.(2007)과 Le et al.(2010) 등에서 제시된 정확한 이산시간모형에서는

상태변수의 확률과정이 Car 과정을 따르며, 이로 인해 연속시간 확률과정이 가지는 특성을 모두 충족시키게 된다. 그리고 상태변수의 해석적인 전이확률밀도함수를 얻을 수 있을 뿐만 아니라, 일반균형 접근법을 따르는 거시금융모형과 부합하는 이자율기간구조를 도출할 수 있다.

정확한 이산시간모형에서 이산시간 지수선형과정인 Car 과정¹⁾은 시간간격이 0으로 수렴할 때 연속시간 지수선형과정으로 수렴한다. 그러나 연속시간 지수선형과정을 이산화하는 경우 이산시간 지수선형과정에는 포함되지만, 이들의 극한과정이 모두 연속시간 지수선형과정으로 수렴하는 것은 아니다. 즉, 모든 이산시간 지수선형과정의 극한이 연속시간 지수선형과정과 동일한 확률적 특성을 충족하지 않기 때문에 이산시간 지수선형과정이 보다 포괄적이라 할 수 있다. 이처럼 Car 과정은 이산화에 따른 문제점을 해결해주는 이산시간 확률과정이라고 할 수 있다. 본 논문에서는 이러한 이산시간 확률과정이 이자율기간구조를 실증적으로 분석하고 그 결과를 해석할 때 가지는 장점에 대해 살펴볼 것이다.

[표-1]은 상태변수의 Feller 조건과 전이확률밀도함수를 중심으로 연속시간 상사모형, 정확한 이산시간모형의 특성을 개괄적으로 제시하고 있다. [표-1]에서 보듯이 연속시간모형에서 확률미분방정식(stochastic differential equation)으로 설정되는 상태변수의 확률과정이 이산화모형과 정확한 이산시간모형에서는 확률차분방정식(stochastic difference equation)으로 나타난다. 이때, 이산화모형에서는 연속시간모형에서 성립하는 Feller조건과 해석적인 전이확률밀도함수를 얻지 못할 수 있으나 정확한 이산시간모형에서는 이러한 문제점이 발생하지 않는다. 그리고 연속시간모형에서 자산가격결정을 위한 편미분방정식(PDE)과 무차익거래 제약을 충족하는 상미분방정식(no arbitrage ODE)은 이산시간

1) Car 과정은 이산시간 지수선형과정에서 그 극한이 연속시간 지수선형과정과 동일한 확률적 특성을 충족한다. Car 과정을 따르는 상태변수를 가정하는 경우 이산시간 하에서도 Feller조건이 충족할 뿐만 아니라 이산시간 전이확률밀도함수를 해석적인 형태로 얻는 것이 가능하다. Car 과정과 관련하여 제 4장에서 자세히 논의하기로 한다.

모형에서 차분방정식 (difference equation)으로 전환된다. 이산시간모형에 대한 실증분석에서는 앞서 언급된 Feller조건 및 상태변수의 전이확률밀도함수와 관련된 문제를 해결하는 것이 필요한데, 본 연구에서는 이산화과정에서 이와 관련하여 발생하는 문제와 이를 해결하는 정확한 이산시간모형에 관한 연구들을 살펴본다. [표-1]의 첫 번째 열 하단에 소개된 Duffie and Kan(1996), Dai and Singleton(2000) 그리고 Duffee(2002) 등은 연속시간 하에서의 지수선형모형(affine term structure model: 이하 ATSM)을 다룬 연구이다. 두 번째 열에서 소개하는 Backus et al.(1998, 2001)과 Ang and Piazzesi(2003)는 이에 상응하는 이산화모형이며, 세 번째 열의 Le et al.(2010)은 정확한 이산시간 ATSM이다. 다음으로, 첫 번째 열의 Ahn et al.(2002)과 Leippold and Wu(2002)는 연속시간 지수이차 가우시언모형(quadratic term structure model: 이하 QTSM)을 다루고 있으며, 이를 이산화한 모형이 Realdon(2006)과 Ang et al.(2008)이다. 그리고 Grouerieroux and Sufana(2011)는 정확한 이산시간 QTSM을 다루고 있다. 두 번째 열 마지막 행에 소개된 Bansal and Zhou(2002)와 Bansal et al.(2004)은 이산화모형으로서 정확한 이산시간모형인 Monfort and Pegoraro(2006, 2007) 및 Dai et al.(2007) 등과 더불어 이자율기간구조의 비선형 또는 비대칭적 특성을 설명하기 위한 국면전환(regime switching) ATSM을 다룬 연구이다. 본론에서는 이들 각각의 연구들을 살펴보며 연속시간모형과의 비교를 통해 이산시간모형의 설정(specification) 상의 특성과 한계를 파악할 것이다.

본 연구는 이자율 기간구조모형 중에서도 이산시간모형에 대해 분석·정리하고 최근의 연구결과를 소개하고자 한다. 균형모형을 중심으로 한 이산시간모형을 확률과정에 따라 연속시간 상사모형과 정확한 이산시간모형의 두 가지 범주로 구분하고, 각각을 다시 선형모형과 비선형모형으로 나누어 살펴본다. 본 연구의 구성은 다음과 같다. 우선 제 2장에서는 이자율기간구조와 관련된 기초개념을 다룬다. 제 3장에서는 연속시간 상

사모형을 단일요인과 다요인 모형, 선형모형과 비선형모형으로 나누어 살펴본다. 제 4장에서는 정확한 이산시간모형과 관련된 개념을 정리하고 최근의 연구를 분석하고 정리한다. 마지막으로 제 5장에서는 결론과 앞으로의 연구방향에 대해 언급한다.

[표-1] 이산시간 이자율 기간구조모형의 구분

- 다변량 Feller 조건 [허용(admissibility) 조건] - Duffie and Kan(1996, Condition A, p387)

$$\begin{cases} \beta_i \Sigma^j \neq 0 \\ \beta_i (ax + b) > \frac{1}{2} \beta_i \Sigma \Sigma' S' \beta_i' \end{cases}$$

- 상태변수의 전이확률밀도함수(Transition Density of State Variable)

이산화(Discretization)

$$\int \rightarrow \sum, \quad d \rightarrow \Delta$$

연속시간모형 (Continuous Time Model)	연속시간 상사 이산시간모형 (Continuous Time Analog Discrete Time Model)	정확한 이산시간모형 (Exact Discrete Time Model)
<p>확률미분방정식 (SDE : Stochastic Differential Equation)</p> $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t^Q$ <p>편미분방정식 (PDE)</p> $\frac{\partial}{\partial t} P + \mathcal{L}P - rP = 0$ <p>무차익 상미분방정식 (No Arbitrage ODE)</p> $\begin{cases} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \Theta^Q K^Q B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \alpha_i - \delta_0 \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} = -K^Q B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [\Sigma' B(\tau)]_i^2 \beta_i - \delta_X \end{cases}$	<p>확률차분방정식 (SDE : Stochastic Difference Equation)</p> $\Delta X_t = \mu(X_t) + \sigma(X_t)\epsilon_{t+1}^Q$ <p>차분방정식 (Solve RE)</p> $P_{t,n} = E_t[P_{t+1,n-1} M_{t+1}]$ <p>무차익 추차차분방정식(No Arbitrage RDE)</p> $\begin{cases} A_n = \delta_0 + A_{n-1} + B_{n-1}'(I - \Phi)\theta - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K (\lambda_j + B_{n-1,j})^2 \alpha_j \\ B_n = \delta + \Phi' B_{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K (\lambda_j + B_{n-1,j})^2 \beta_j \end{cases}$	<p>정확한 이산시간모형 Car Process (Discrete Time Exponential Affine Process)</p> $\begin{aligned} \phi_t(u X_t) &= E[\exp(u' X_{t+1}) X_t] \\ &= \exp[a_t(u)' X_t + b_t(u)] \end{aligned}$ $P_{t,n} = E_t^Q[P_{t+1,n-1}]$ <p>No Arbitrage RDE</p> $\begin{cases} A_n = \delta_0 + A_{n-1} - a(-B_{n-1}) \\ B_n = \delta_X - b(-B_{n-1}) \end{cases}$

[표-1] 이산시간 이자율 기간구조모형의 구분(계속)

연속시간모형 (Continuous Time Model)	연속시간 상사 이산시간모형 (Continuous Time Analog Discrete Time Model)	정확한 이산시간모형 (Exact Discrete Time Model)
Duffie and Kan(1996), Dai and Singleton(2000)	Backus et al(1998, 2001)	Le et al. (2010)
Duffee(2002), Duarte(2004), Cheridito et al.(2007)	Ang and Piazzesi(2003)	
Ahn et al(2002), Leippold and Wu(2002)	Realdon(2006), Ang et al(2008)	Grouerieroux and Sufana(2011)
	Bansal and Zhou(2002), Bansal et al.(2004)	Monfort and Pegoraro (2006, 2007), Dai et al.(2007)

제 2 장 이자율기간구조와 관련된 기본 개념

제 1 절 채권가격과 수익률

이산시간 이자율 기간구조모형에 대한 논의에 앞서 이자율기간구조와 관련된 기본 개념을 살펴보기로 한다. 이자율 기간구조모형에서 다루는 채권수익률(bond yields)은 기본적으로 이표를 지급하지 않는 무이표채 수익률(zero-coupon bond yields, ZCB yields)이다. 이는 이표(coupon)를 지급하는 채권수익률은 무이표채수익률을 이용하여 쉽게 구할 수 있기 때문이다. 그러나 일반적으로 1년 미만 만기의 단기채권을 제외한 대부분의 채권은 반기마다(semi-annually) 이표를 지급하므로 직접적으로 무이표채수익률을 관측하기 어려울 뿐만 아니라 특정 시점에 서로 다른 만기를 가지는 모든 채권을 관측하는 것이 쉽지 않다. 이로 인해 이자율 기간구조모형에 대한 분석에는 매 시점마다 관측가능한 불연속적인 만기를 가지는 이표채수익률로부터 연속적인 만기의 무이표채수익률을 내삽(interpolation)하는 방법으로 구성된 수익률이 이용된다²⁾. 따라서 본 논문의 논의에서 특별한 언급이 없는 한 채권수익률은 연속복리 무이표채수익률(continuously compounded zero-coupon bond yields)을 의미한다.

잔존만기가 n 이고 만기에 1을 지급하는 무이표채의 t 시점 가격을 $P_{n,t}$ 라고 하면 채권의 수익률 $y_{n,t}$ 은 이산시간에서 다음과 같이 정의된다.

$$P_{n,t} = \frac{1}{(1 + y_{n,t})^n}$$

2) 이표채수익률을 이용하여 무이표채수익률을 내삽하는 방법에 대한 자세한 논의는 Bliss(1997), James and Webber(2000)를 참조할 수 있다. Bliss (1996)은 일반적으로 이용되는 다양한 무이표채수익률 추출방법에 대한 비교 분석결과를 제시하고 있다.

이를 보면 이자율 기간구조모형은 무이표채 가격결정모형과 동일함을 알 수 있다. 위식의 좌변과 우변에 자연대수(log)를 취한 다음 $\log(1+x) \simeq x$ 의 로그근사를 이용하면 $y_{n,t}$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_{n,t} = -\frac{1}{n} \log [P_{n,t}] \Leftrightarrow P_{n,t} = \exp [-n y_{n,t}] \quad (2-1)$$

이러한 방법으로 채권수익률을 정의하고 만기가 1인 채권의 수익률 $y_{1,t}$ 을 무위험단기이자율(riskless short interest rate, r_t)이라고 하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$r_t \equiv y_{1,t} = -\log [P_{1,t}]$$

이를 이용하면 잔존만기 n 인 채권의 m -기간 선도이자율(m -period forward rate)을 정의할 수 있다.

$$f_{n,t}^{(m)} = \frac{1}{m} \log \left[\frac{P_{n,t}}{P_{n+m,t}} \right] = \frac{1}{m} [(n+m) y_{n+m,t} - n y_{n,t}] \quad (2-2)$$

식 (2-2)가 m -기간 선도이자율을 나타내지만, 일반적으로 선도이자율이라 할 때는 $m=1$ 인 1-기간선도이자율을 의미한다. 그리고 잔존만기 n 인 채권의 1-기간보유수익률(holding return of 1-period, $h_{n,t+1}$)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_{n,t+1} = \log \left[\frac{P_{n-1,t+1}}{P_{n,t}} \right] = n y_{n,t} - (n-1) y_{n-1,t+1} \quad (2-3)$$

이자율 기간구조모형에서 채권수익률과 관련된 리스크프리미엄(risk premium)은 일반적으로 식 (2-2)와 같이 정의되는 1-기간선도이자율 또

는 식 (2-3)과 같이 정의되는 1-기간보유수익률을 이용하여 정의된다. 1-기간선도이자율과 이자율 기대가설을 이용하면, 다음과 같은 잔존만기가 n 인 채권의 리스크프리미엄을 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}\xi_t^{(n)} &= y_{n,t} - \frac{1}{n} [(n-1)y_{n-1,t} + E_t[r_{t+n-1}]] \\ &= \frac{1}{n} [f_{n,t}^{(1)} - E_t[r_{t+n-1}]]\end{aligned}\quad (2-4)$$

여기에서 $E_t[\cdot]$ 는 조건부기대치를 나타낸다. 이렇게 정의되는 리스크프리미엄을 선도이자율 기간프리미엄(forward rate term premium) 또는 간단하게 기간프리미엄(term premium)이라 한다. 식 (2-4)의 두 번째 행은 잔존만기 n 인 채권의 1-기간선도이자율과 n 기간 후의 단기이자율의 차를 나타내는데, 이자율기대가설이 성립하는 경우 이같이 정의되는 리스크프리미엄은 0이 된다. 그리고 식 (2-3)의 1-기간보유수익률을 이용하여 정의되는 1-기간초과보유수익률(excess holding return of 1-period, $er_{t+1}^{(n)}$)에 조건부기대치를 취하여 얻는 기대초과수익률로 리스크프리미엄을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$er_{t+1}^{(n)} = E_t \left[\log \left(\frac{P_{n-1,t+1}}{P_{n,t}} \right) \right] - r_t = n y_{nt} - (n-1) E_t[y_{n-1,t+1}] - r_t \quad (2-5)$$

이자율 기간구조모형과 그 계수 값이 주어진다면, 이를 이용하여 식 (2-4) 또는 식 (2-5)로 정의되는 리스크프리미엄을 쉽게 계산할 수 있다.

제 2 절 확률할인요인

주식 및 파생상품 등과 마찬가지로 채권의 가격결정에서도 핵심적인

역할을 하는 것은 확률할인요인(Stochastic discount factor, SDF)이다. 대부분의 연속시간 이자율 기간구조모형에서 SDF의 존재를 가정하고 직접 SDF를 설정(direct specification of SDF)하여 채권가격을 도출한다. 이러한 모형설정은 Harrison and Kreps(1979), Harrison and Pliska(1981)에서 제시된 연구결과에 근거한 것이다. Harrison and Kreps(1979)와 Harrison and Pliska(1981)는 무차익거래(absence of arbitrage opportunity) 조건과 마찰적 요인이 없는 완전시장(complete market) 가정하에 식 (2-6)과 같은 P -마팅게일성질(P -martingale property)을 충족하는 양의 확률과정(stochastic process) $M(t)$ 가 존재한다는 것을 보였다.

$$M(t) V(t) = E_t^P [M(T) V(T)] \quad , \quad T > t \quad (2-6)$$

여기에서 $E_t^P [\cdot]$ 은 실질측도(physical measure, P 측도)하의 조건부기대치(conditional expectation)을 나타내며, $V(t)$ 와 $V(T)$ 는 각각 t 시점과 T 시점의 자산가격을 나타낸다. 식 (2-6)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$V(t) = E_t^P \left[\frac{M(T)}{M(t)} V(T) \right] \quad (2-7)$$

식 (2-7)은 t 시점의 자산가격이 T 시점의 불확실한(stochastic) 자산가치의 할인된 값에 대한 P 측도 하의 기대치로 해석할 수 있음을 보여준다. 식 (2-7)은 무차익거래 조건이 충족되는 완전시장 가정하에서 모든 자산 가격에 대하여 성립하므로 $\frac{M(T)}{M(t)}$ 를 SDF라 한다. 이러한 SDF는 가격결정 목적에 있어서는 그것이 존재하는 것만으로 충분하므로 비교적 자유롭게 이를 설정할 수 있다. 대부분의 연속시간 이자율 기간구조모형은 SDF를 직접 외생적으로 설정하고 있다. 그러나 외생적으로 설정된 SDF를 이용한 모형은 기본적으로 축약모형(reduced form model)이라는 한

계점을 가지게 된다. 즉, 모형설정에서 선호체계, 부존자원, 소비증가율, 생산기술 등을 설정하는 동태확률일반균형모형(dynamic stochastic general equilibrium model)에서 투자자의 동태최적화과정을 통하지 않고 직접 SDF를 설정할 수 있는 장점이 있다. 그러나 이로부터 얻어진 이자율 기간구조모형에 대한 구조적인 해석(structural interpretation)이 어려워 결과해석이 쉽지 않다. 직접 SDF를 설정하는 연속시간 이자율 기간구조모형이 가지는 한계점은 연속시간 상사 이산시간 이자율 기간구조모형(continuous time interest rate term structure model analog)에서도 동일하게 한계점으로 남아있다.

일반균형모형에서 투자자의 동태최적화 1계조건(first order condition)인 오일러 방정식(Euler equation)으로부터 얻어지는 SDF는 다음과 같은 두시점 사이의 소비의 한계대체율(marginal rate of substitution)로 설정된다.

$$V(t) = E_t^P \left[\beta \frac{U'(C_T)}{U'(C_t)} V(T) \right] \quad (2-8)$$

여기에서 β 는 주관적인 할인요인(subjective discount factor)이며, $U(\cdot)'$ 효용함수의 1계도함수인 소비의 한계효용을 나타내며, C_t 와 C_T 는 각각 t 시점과 T 시점의 소비를 나타낸다.

이산시간 이자율 기간구조모형에 더 적합한 보다 일반적인 SDF 존재와 관련된 연구는 Hansen and Richard(1987)에서 제시되었다. Hansen and Richard(1987)는 ① 자산가격의 존재와 유일성(existence and uniqueness of a price), ② 가격의 선형성과 연속성(linearity and continuity), ③ 무차익거래(absence of arbitrage opportunity)의 세 가지 가정 하에 조건부 Riesz representation 정리로부터 다음의 관계를 충족하는 SDF의 존재와 그 유일성을 보였다³⁾.

3) SDF의 존재 증명과 관련된 자세한 논의는 Hansen and Richard(1987),

$$V_t = E_t^P [M_{t,t+1} M_{t+1,t+2} \cdots M_{T-1,T} V_T] \quad (2-9)$$

여기에서 V_t 와 V_T 는 각각 t 시점과 T 시점의 자산가격을 나타내며, $M_{t,t+1}$ 은 t 시점과 $t+1$ 시점의 기간에 대하여 정의되는 SDF를 나타낸다. 식 (2-9)는 이산시간모형을 염두에 두고 자산가격과 SDF를 표현한 것이다. 이후 표기의 편의를 위하여 특별히 구분해서 표기하는 것이 필요하지 않는 한 $M_{t,t+1}$ 를 간단히 M_{t+1} 로 표기하기로 한다.

식 (2-9)는 식 (2-7)의 연속시간모형 뿐만 아니라 식 (2-8)로 표현된 구조모형으로부터 도출되는 SDF에도 적용된다. 식 (2-9)의 자산가격결정식을 잔존만기 n 인 무이표채가격에 적용하면 채권가격은 다음과 같다.

$$P_{n,t} = E_t^P [M_{t+1} M_{t+2} \cdots M_{t+n} \cdot 1] \quad (2-10)$$

여기에서 우변은 만기시점의 채권가격 $P_{0,t+n} = 1$ 을 반영한 것이다. 반복기대치의 법칙(law of iterated expectation, LIE)을 적용하면 식 (2-10)을 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$P_{n,t} = E_t^P [M_{t+1} P_{n-1,t+1}] \quad (2-11)$$

식 (2-11)은 P 측도 하의 기초채권가격결정식 (fundamental bond pricing equation)으로 볼 수 있다. 측도변환을 위한 Radon-Nikodym derivative는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{M_{t+1}}{E_t[M_{t+1}]} \quad (2-12)$$

Cochrane(2005), Singleton(2006)을 참조할 수 있다.

식 (2-12)와 식 (2-1)를 통해 알 수 있는 $E_t[M_{t+1}] = \exp(-r_t)$ 를 이용하면 식 (2-11)을 다음과 같이 위험중립측도(risk neutral measure, Q 측도) 하의 기초채권가격결정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$P_{n,t} = \exp(-r_t) E_t^Q [P_{n-1,t+1}] \quad (2-13)$$

또한 이를 이용하여 식 (2-10)을 무위험단기이자율의 합으로 할인한 만기시점의 채권가격에 대한 Q 측도 하의 기대치로 나타낼 수 있다.

$$P_{n,t} = E_t^Q \left[\exp \left(- \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i} \right) \right] \quad (2-14)$$

식 (2-14)는 연속시간모형의 Q 측도 하에 채권가격에 상응하는 이산시간 채권가격임을 알 수 있다. 이산시간 이자율 기간구조모형에서 P 측도 하의 기초채권가격결정식인 식 (2-11)이나 Q 측도 하의 채권가격결정식인 식 (2-14)를 분석목적이나 모형설정의 편의성, 모형추정의 용이성 등에 따라 선택적으로 이용할 수 있다. 특히, 정확한 이산시간 기간구조모형에서는 라플라스변환(Laplace transform)을 이용하여 식 (2-12)과 같은 측도변환을 위한 Radon-Nikodym derivative를 도출하는데 이와 관련된 논의는 이후 제 4장에서 살펴볼 정확한 이산시간 기간구조모형에서 자세하게 다루기로 한다.

제 3 장 연속시간 상사 이자율 기간구조모형

제 1 절 단일요인 이산시간모형

여기에서는 일반적인 이산시간 이자율 기간구조모형의 기본(building block)이 되는 단일요인 이산시간 Vasicek모형과 CIR모형을 살펴보기로 한다. 현실에서 관측되는 이자율기간구조의 전형적인 특성을 설명하기 위한 다요인 기간구조모형들은 기본적으로 이들 단일요인 기간구조모형을 합성하는 방법으로 구성된다. 그러므로 이들 단일요인 모형의 특성과 한계점에 대하여 살펴보는 것이 다요인 모형을 이해하기 위한 유용한 과제가 될 것이다.

1. 단일요인 Vasicek모형

단일요인 이산시간 Vasicek모형(univariate Vasicek discrete time model)은 다음과 같은 상태변수에 대한 지수선형함수로 설정되는 SDF를 가정한다.

$$-m_{t+1} = x_t + \lambda \sigma \epsilon_{t+1} \quad (3-1)$$

여기에서 $m_{t+1} = \log M_{t+1}$, x_t 는 스칼라 상태변수, λ 는 상수로 설정된 위험의 시장가격, σ 는 위험을 나타내는 상태변수의 조건부 표준편차를 나타내며, ϵ_{t+1} 은 독립이고 동일한 일변량 표준정규분포 $i.i.d.N(0, 1)$ 를 따르는 확률변수를 나타낸다. 그리고 투자자가 얻을 수 있는 전반적인 경제상황에 대한 정보를 나타내는 상태변수 x_t 는 \mathcal{P} 측도 하에서 다음과 같은 등분산성을 가지는 일변량 AR(1) 과정(homoskedastic univariate autoregressive process of order 1)을 따르는 것으로 설정된다.

$$x_{t+1} = (1 - \phi)\theta + \phi x_t + \sigma \epsilon_{t+1} \quad (3-2)$$

여기에서 ϕ 는 지속성, θ 는 장기평균 그리고 σ 는 조건부표준편차를 나타낸다. 또한 식 (3-1)에서 위험을 나타내는 파라미터 σ 는 상태변수의 조건부표준편차이다. 식 (3-1)의 SDF와 식 (3-2)의 상태변수를 이용하면 잔존만기가 n 인 무이표채의 t 시점 가격($P_{n,t}$)은 상태변수 x_t 의 지수선형 함수가 되는 것을 알 수 있다.

$$P_{n,t} = \exp[-A_n - B_n x_t] \quad (3-3)$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 시점 t 에는 의존하지 않고 채권의 잔존만기에만 의존하는 스칼라함수를 나타낸다. 그러므로 t 시점의 상태변수와 잔존만기의 함수인 $\{A_n, B_n\}$ 을 알 수 있으면 t 시점의 채권가격을 얻을 수 있다.

식 (3-1)~식 (3-3)으로 설정된 SDF, 상태변수의 확률과정 그리고 채권가격함수를 채권에 대한 기초가격결정방정식에 대입한 다음, 로그정규분포의 성질⁴⁾을 이용하여 정리하면 잔존만기의 함수인 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 추차적인 차분방정식 (recursive difference equations)을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1}(1 - \phi)\theta - \frac{1}{2}(\lambda + B_{n-1})^2 \sigma^2 \\ B_n = 1 + B_{n-1}\phi \end{cases} \quad (3-4)$$

그리고 잔존만기 $n=0$ 인 시점의 채권가격이 $P_{0,t+n} = 1$ 이므로 $\{A_0 = 0, B_0 = 0\}$ 의 초기조건을 이용하여 식 (3-4)의 차분방정식을 추

4) 자연대수를 취한 확률변수 $\log x$ 가 평균과 분산이 각각 μ 와 σ^2 인 정규분포를 따르는 경우, 즉 $\log x \sim N(\mu, \sigma^2)$ 인 경우, $\log[E(x)] = \mu + \sigma^2/2$ 를 얻을 수 있다.

차적으로 계산하면 임의의 잔존만기(n)의 함수인 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있고 이를 식 (3-3)의 채권가격식에 대입하면 채권가격을 구할 수 있다.

이산시간 Vasicek모형에서 식 (2-5)와 같은 기대초과수익률로 정의되는 리스크프리미엄은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} er_{t+1}^{(n)} &= E_t \left[\log \left(\frac{P_{n-1,t+1}}{P_{n,t}} \right) \right] - r_t = n y_{n,t} - (n-1) [y_{n-1,t+1}] + y_{1,t} \\ &= -\lambda B_{n-1} \sigma^2 - \frac{1}{2} B_{n-1}^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

이처럼 이산시간 Vasicek모형의 리스크프리미엄(time-varying risk premium)은 상태변수 x_t 에 의존하지 않고 채권의 만기 n 에만 의존하는 상수이다. 그러므로 이산시간 단일요인 Vasicek모형은 시변리스크프리미엄(time-varying risk premium)을 포착할 수 없는 모형임을 알 수 있다.

이산시간 이자율 기간구조모형에서 단기이자율(r_t)은 $r_t = y_{1,t}$ 의 관계를 가진다. 그런데 채권가격이 식 (3-3)과 같이 설정되므로 다음과 같이 $y_{1,t}$ 는 상태변수에 대한 선형함수로 얻어진다.

$$r_t \equiv y_{1,t} = A_1 + B_1 x_t \quad (3-5)$$

식 (3-4)의 관계를 이용하면 $\left\{ A_1 = -\frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2, B_1 = 1 \right\}$ 이므로 식 (3-5)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r_t = -\frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 + x_t \quad (3-6)$$

이를 이용하면 식 (3-3)에서와 같이 상태변수 x_t 에 대한 지수선형함수로

설정된 t 시점의 잔존만기 n 인 채권가격식은 단기이자율에 대한 지수선형함수로 다시 쓸 수 있다.

$$P_{n,t} = \exp \left[- \left(A_n + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 B_n \right) - B_n r_t \right] = \exp \left[- A_n^* - B_n^* r_t \right] \quad (3-7)$$

여기에서 $A_n^* = A_n + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 B_n$, $B_n^* = B_n$ 과 식 (1-6)의 관계를 이용하면 상태변수 x_t 에 대한 동태방정식 식 (3-2) 또한 다음과 같이 단기이자율 r_t 에 대한 동태방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$r_{t+1} = (1 - \phi) (\theta - \lambda^2 \sigma^2 / 2) + \phi r_t + \sigma \epsilon_{t+1} = (1 - \phi) \theta^* + \phi r_t + \sigma \epsilon_{t+1} \quad (3-8)$$

여기에서 $\theta^* = \theta - \lambda^2 \sigma^2 / 2$ 이다. 식 (3-6)~식 (3-8)은 단기이자율 r_t 을 상태변수로 설정하는 일변량 이산시간 기간구조모형으로 볼 수 있다. 이는 단기이자율을 상태변수로 하는 연속시간 Vasicek모형을 이산화한 형태라 할 수 있다.

2. 단일요인 CIR모형

앞서 살펴본 이산시간 Vasicek모형은 연속시간 Vasicek모형과 마찬가지로 이자율기간구조의 전형적인 특성인 이분산성과 시변(time-varying) 리스크프리미엄을 설명하지 못한다. 이산시간 CIR모형(univariate Cox, Ingersoll and Ross model)은 이러한 한계점을 극복할 수 있는 대안이 될 수 있다.

이산시간 CIR모형에서는 시변리스크프리미엄을 포착할 수 있도록 SDF를 다음과 같은 지수선형함수로 설정한다.

$$-m_{t+1} = x_t + \lambda \sigma \sqrt{x_t} \epsilon_{t+1} \quad (3-9)$$

여기에서 $m_{t+1} = \log M_{t+1}$, x_t 는 스칼라 상태변수, λ 는 상수인 위험에 대한 시장가격, $\sigma \sqrt{x_t}$ 는 상태변수의 조건부표준편차를 나타내며, ϵ_{t+1} 는 독립이고 동일한 일변량 표준정규분포 $i.i.d.N(0, 1)$ 를 따르는 확률변수를 나타낸다. 그리고 전반적인 경제상황에 대한 정보를 함축하고 있는 상태변수 x_t 는 P 측도 하에서 다음과 같은 이분산성을 가지는 일변량 AR(1) 과정(heteroskedastic univariate autoregressive process of order 1)을 따른다.

$$x_{t+1} = (1 - \phi)\theta + \phi x_t + \sigma \sqrt{x_t} \epsilon_{t+1} \quad (3-10)$$

여기에서 ϕ 는 지속성, θ 는 장기평균 그리고 $\sigma \sqrt{x_t}$ 는 조건부표준편차를 나타낸다. 이를 통해 x_t 의 조건부분산이 상태변수의 선형함수가 되도록 설정된 것임을 알 수 있다. 식 (3-10)은 연속시간 CIR과정을 이산화한 (discretized) 확률과정임을 알 수 있다. 그러나 연속시간 CIR확률과정은 Feller조건⁵⁾을 부과할 때 이자율이 비음(non-negative)의 값을 가지지만 식 (3-10)의 이산시간 CIR과정은 Feller조건을 부과하더라도 양의 확률로 음의 값을 가질 수 있어 이자율이 음이 될 수 있다. CIR모형의 경우도 Vasicek모형에서와 같이 잔존만기가 n 인 무이표채의 t 시점의 가격 $(P_{n,t})$ 은 다음과 같은 상태변수 x_t 의 지수선형함수로 가정된다.

5) 상태변수 x_t 의 연속시간 CIR확률과정은 $dx_t = \kappa(\mu - x_t)dt + \sigma \sqrt{x_t}dW_t$ 와 같이 설정된다. 여기에서 $\kappa > 0$ 는 평균회귀속도, μ 는 장기평균, σ 는 순간변동성, W_t 는 표준적인 위너과정을 나타낸다. 이렇게 설정되는 CIR과정에서 $2\kappa\mu > \sigma^2$ 의 제약조건을 부과하면 상태변수 x_t 는 항상 비음이 된다. 이 때 상태변수 x_t 가 항상 비음이 되도록 하기 위하여 부과하는 제약조건을 Feller조건이라 한다.

$$P_{n,t} = \exp[-A_n - B_n x_t] \quad (3-11)$$

이와 같이 채권가격이 설정되므로 t 시점의 상태변수와 잔존만기의 함수인 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있으면 t 시점의 채권가격을 얻을 수 있다.

Vasicek모형에서와 마찬가지로 식 (3-9)~식 (3-11)으로 설정된 SDF, 상태변수의 확률과정 그리고 채권가격함수를 채권에 대한 기초가격결정 방정식에 대입하여, 로그정규분포의 성질을 이용하여 정리하면 잔존만기의 함수인 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 다음과 같은 추차적인 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} (1 - \phi) \theta \\ B_n = 1 + B_{n-1} \phi - \frac{1}{2} (\lambda + B_{n-1})^2 \sigma^2 \end{cases} \quad (3-12)$$

그리고 $P_{0,t+n} = 1$ 의 경계조건으로부터 알 수 있는 초기조건 $\{A_0 = 0, B_0 = 0\}$ 을 이용하여 식 (3-12)의 차분방정식을 추차적으로 계산하면 임의의 잔존만기(n)에 대한 함수인 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있고 이를 식 (3-11)의 채권가격식에 대입하여 채권가격을 구할 수 할 수 있다.

이산시간 단일요인 CIR모형에서 식 (2-5)에서와 같은 기대초과수익률로 정의되는 리스크프리미엄은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} er_{t+1}^{(n)} &= E_t \left[\log \left(\frac{P_{n-1,t+1}}{P_{n,t}} \right) \right] - r_t = n y_{n,t} - (n-1) [y_{n-1,t+1}] + y_{1,t} \\ &= -\lambda B_{n-1} \sigma^2 x_t - \frac{1}{2} B_{n-1}^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

식에서 이산시간 단일요인 CIR모형의 리스크프리미엄은 상태변수 x_t 와 채권의 만기에 의존하고 있음을 알 수 있다. 따라서 CIR모형은 시변리스

크프리미엄을 모형화하고자 할 때 유용할 수 있다.

이산시간 이자율 기간구조모형에서 단기이자율(r_t)에 대한 $r_t = y_{1,t}$ 의 관계와 식 (3-11)과 상태변수에 대한 지수선형함수로 설정된 채권가격으로부터 단기이자율과 상태변수에 대한 관계를 얻을 수 있다.

$$r_t \equiv y_{1,t} = A_1 + B_1 x_t \quad (3-13)$$

그리고 식 (3-12)의 차분방정식으로부터 $\left\{ A_1 = 0, B_1 = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 \right\}$ 을 얻을 수 있으므로 식 (3-13)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r_t = \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 \right) x_t \quad (3-14)$$

이를 이용하면 식 (3-11)에서와 같이 상태변수 x_t 에 대한 지수선형함수로 설정된 t 시점의 잔존만기 n 인 채권가격식은 다음과 같이 단기이자율에 대한 지수선형함수로 다시 쓸 수 있다.

$$P_{n,t} = \exp \left[-A_n - \frac{B_n}{(1 - \lambda^2 \sigma^2 / 2)} r_t \right] = \exp \left[-A_n^* - B_n^* r_t \right] \quad (3-15)$$

여기에서 $A_n^* = A_n$, $B_n^* = B_n / (1 - \lambda^2 \sigma^2 / 2)$ 이다. 또한 식 (3-14)의 관계를 이용하면 상태변수 x_t 에 대한 동태방정식 식 (3-10)을 다음과 같은 단기이자율 r_t 에 대한 동태방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= (1 - \phi) \theta (1 - \lambda^2 \sigma^2 / 2) + \phi r_t + \sigma \sqrt{(1 - \lambda^2 \sigma^2 / 2)} \sqrt{r_t} \epsilon_{t+1} \\ &= (1 - \phi) \theta^* + \phi r_t + \sigma^* \sqrt{r_t} \epsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (3-16)$$

여기에서 $\theta^* = \theta(1 - \lambda^2\sigma^2/2)$, $\sigma^* = \sigma\sqrt{(1 - \lambda^2\sigma^2/2)}$ 이다. 식 (3-14)~식 (3-16)은 단기이자율 r_t 를 상태변수로 가지는 일변량 이산시간 CIR모형 설정으로 볼 수 있다. 이는 연속시간 CIR모형을 이산화한 형태에 해당하는 이산시간모형임을 알 수 있다.

제 2 절 다요인 이산시간모형

본 절에서는 이산시간 다요인 이자율 기간구조모형에 대해 간략하게 살펴보기로 한다. 연속시간 다요인 모형들이 대부분 연속시간 단일요인 이자율 기간구조모형들의 결합으로 구성된 것과 같이 이산시간 다요인 모형들도 이산시간 단일요인 모형들의 결합으로 설정된다.

1. 다요인 Vasicek모형

앞서 살펴본 단일요인 Vasicek모형은 비교적 쉽게 다요인 모형으로 확장될 수 있다. 다요인 Vasicek모형(multivariate Vasicek model)에서 SDF는 단일요인 모형에서와 유사하게 상태변수에 대한 지수선형모형으로 가정된다.

$$-m_{t+1} = \mathbf{1}'X_t + \lambda'\Sigma\epsilon_{t+1} \quad (3-17)$$

여기에서 $m_{t+1} = \log M_{t+1}$, $\mathbf{1}$ 은 모든 원소들이 1인 K 차원벡터, 상태변수 X_t 는 K 차원벡터, λ 는 위험에 대한 시장가격을 나타내는 K 차원 상수벡터, Σ 는 상태변수의 조건부분산 $Var_t(X_{t+1}) = \Sigma\Sigma'$ 를 충족하는 $(K \times K)$ 행렬, 그리고 ϵ_{t+1} 은 독립이고 동일한 다변량표준정규분포 $i.i.d.N(0, I)$ 를 따르는 확률변수이다. 투자자가 얻을 수 있는 전반적인 경제상황에 대한 정보를 나타내는 K 차원 상태변수벡터 X_t 는 \mathcal{P} 측도 하에서 다음과 같은 등분

산성을 가지는 VAR(1) 과정(homoskedastic vector autoregressive process of order 1)을 따르도록 확장된다.

$$X_{t+1} = (I - \Phi) \theta + \Phi X_t + \Sigma \epsilon_{t+1} \quad (3-18)$$

여기에서 지속성 파라미터 Φ 는 $(K \times K)$ 행렬, 장기평균을 나타내는 θ 는 K 차원 벡터이다. 이러한 상태변수의 동태방정식으로 인해 이산시간 다요인 Vasicek모형 역시 조건부확률변동성을 사실상 설명하지 못한다. 식 (3-17)과 식 (3-18)과 같이 SDF와 상태변수의 동태방정식을 가정하고, t 시점의 잔존만기가 n 인 무이표채가격($P_{n,t}$)은 다음과 같이 상태변수에 대한 지수선형모형이다.

$$P_{n,t} = \exp [- A_n - B_n' X_t] \quad (3-19)$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 시점 t 에는 의존하지 않고 채권의 잔존만기에만 의존하는 함수로 각각 스칼라함수와 K 차원의 벡터함수를 나타낸다. 이와 같이 채권가격이 설정되므로 t 시점의 상태변수와 잔존만기의 함수인 $\{A_n, B_n\}$ 을 구할 수 있으면 t 시점의 채권가격을 알 수 있다.

식 (3-17)~식 (3-19)를 채권에 대한 기초가격결정방정식에 대입한 다음, 로그정규분포의 성질을 이용하여 정리하면 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 다음과 같은 추차적인 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1}' (I - \Phi) \theta - \frac{1}{2} (\lambda + B_{n-1})' \Sigma \Sigma' (\lambda + B_{n-1}) \\ B_n = \mathbf{1} + \Phi' B_{n-1} \end{cases} \quad (3-20)$$

그리고 $P_{0,t+n} = 1$ 의 경계조건으로부터 알 수 있는 $\{A_0 = 0, B_0 = \mathbf{0}_{K \times 1}\}$

인 초기조건을 이용하여 식 (3-20)의 차분방정식을 추차적으로 계산하면 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있고 이를 식 (3-19)에 대입하면 채권가격을 구할 수 있다.

이산시간 이자율 기간구조모형에서 단기이자율(r_t)은 $r_t = y_{1,t}$ 의 관계를 충족하므로 식 (3-19)의 채권가격식을 이용하여 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$r_t \equiv y_{1,t} = A_1 + B_1' X_t \quad (3-21)$$

초기조건 $\{A_0 = 0, B_0 = \mathbf{0}_{K \times 1}\}$ 을 식 (3-20)에 대입하여 $\left\{A_1 = -\frac{1}{2} \lambda' \Sigma \Sigma' \lambda, B_1 = \mathbf{1}\right\}$ 을 얻을 수 있으므로 식 (3-21)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$r_t = -\frac{1}{2} \lambda' \Sigma \Sigma' \lambda + \mathbf{1}' X_t \quad (3-22)$$

이를 이용하면 상태변수의 지수선형방정식으로 설정된 식 (3-17)의 SDF를 단기이자율의 지수선형함수로 나타낼 수 있다. 여기에서 $\tilde{\lambda} = \lambda' \Sigma$ 이다.

$$-m_{t+1} = r_t + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}' \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}' \epsilon_{t+1} \quad (3-23)$$

2. 다요인 CIR모형

Vasicek모형의 경우 단일요인 모형을 다요인 모형으로 확장하는 것이 비교적 단순한 반면, 조건부이분산성을 포함하는 이산시간 단일요인 CIR 모형은 다요인 모형으로 확장하는 것이 쉽지 않다. 따라서 다요인 CIR모형(multivariate CIR model)에서는 다음과 같은 형태로 SDF를 제시한다.

$$-m_{t+1} = \mathbf{1}' X_t + \lambda' \Sigma \text{diag}(\sqrt{X_t}) \epsilon_{t+1} \quad (3-24)$$

여기에서 $m_{t+1} = \log M_{t+1}$, $\mathbf{1}$ 은 모든 원소들이 1인 K 차원벡터, 상태변수 X_t 는 K 차원벡터, λ 는 위험에 대한 시장가격을 나타내는 K 차원 상수벡터, Σ 는 상태변수의 조건부표준편차에 대한 스케일을 나타내는 $(K \times K)$ 행렬, $\text{diag}(\sqrt{X_t})$ 는 K 차원벡터인 각각의 상태변수의 제곱근을 대각원소로 가지는 $(K \times K)$ 행렬 그리고 ϵ_{t+1} 는 독립이고 동일한 다변량표준정규분포 $i.i.d.N(0, I)$ 를 따르는 확률변수이다. 그리고 K 차원의 상태변수 X_t 는 P 측도 하에서 다음과 같은 조건부이분성을 가지는 VAR(1) 과정(heteroskedastic vector autoregressive process of order 1)으로 설정된다.

$$X_{t+1} = (I - \Phi) \theta + \Phi X_t + \Sigma \text{diag}(\sqrt{X_t}) \epsilon_{t+1} \quad (3-25)$$

여기에서 지속성 파라미터 Φ 는 $(K \times K)$ 행렬, 장기평균을 나타내는 θ 는 K 차원의 벡터이다. 식 (3-24)와 식 (3-25)의 조건부표준편차 설정에서 의견상으로는 마치 제약이 부과된 것으로 보인다. 그러나 상태변수의 조건부분산행렬의 각 원소들은 모든 상태변수에 대한 선형함수이므로 사실상 제약이 부과된 것은 아니다. 이는 다음과 같은 2요인 CIR모형의 조건부분산에 대한 식을 통해서 쉽게 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Cov}_t [\Sigma \text{diag}(\sqrt{X_t}) \epsilon_{t+1}] &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} & 0 \\ 0 & x_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 x_{1t} + \sigma_{12}^2 x_{2t} & \sigma_{11} \sigma_{21} x_{1t} + \sigma_{12} \sigma_{22} x_{2t} \\ \sigma_{21} \sigma_{11} x_{1t} + \sigma_{22} \sigma_{12} x_{2t} & \sigma_{21}^2 x_{1t} + \sigma_{22}^2 x_{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

그러나 이산시간 다요인 CIR모형에서는 연속시간모형에서 충족되는 상

태변수의 비음 조건이 충족되기 어려울 뿐만 아니라 상태변수의 정확한 전이확률밀도함수(exact transition probability density function)를 얻는 것이 용이하지 않다. 따라서 일반적으로 연속시간 다요인 CIR모형을 이산화한 이산시간 다요인 CIR모형에서도 Chen and Scott(1993)의 연속시간 이자율 기간구조모형에서와 같이 각각의 상태변수들이 서로 독립적인 것으로 설정된다. 즉, 일반적으로 지속성파라미터 ϕ 와 Σ 는 주로 대각행렬임을 뜻한다. 앞으로 계속되는 논의에서도 이산화된 이산시간 CIR모형이 이러한 제약을 가짐을 염두에 두어야 한다.

다요인 Vasicek모형과 같이 t 시점의 잔존만기가 n 인 무이표채가격($P_{n,t}$)이 다음과 같은 상태변수에 대한 지수선형모형으로 결정된다.

$$P_{n,t} = \exp [- A_n - B_n' X_t] \quad (3-26)$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 시점 t 에 의존하지 않고 채권의 잔존만기에만 의존하는 함수로 각각 스칼라함수와 K 차원의 벡터함수이다.

식 (3-24)~식 (3-26)으로 설정된 SDF, 상태변수 X_t 의 확률과정 그리고 채권가격함수를 채권에 대한 기초가격결정방정식에 대입한 다음, 로그정규분포의 성질을 이용하여 정리하면 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 다음과 같은 차분방정식체계를 얻을 수 있다⁶⁾.

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1}' (I - \Phi) \theta \\ B_n = \mathbf{1} + \Phi' B_{n-1} - \frac{1}{2} [(\lambda + B_{n-1})' \Sigma \odot (\lambda + B_{n-1})' \Sigma]' \end{cases} \quad (3-27)$$

여기에서 \odot 는 각각의 벡터들의 원소들의 곱을 나타내는 Hadamard

6) x 와 z 를 k 차원의 열벡터라 하면 $z' \text{diag}(x) z = (z \odot z)' x$ 의 관계를 얻을 수 있다. 여기에서 $\text{diag}(x)$ 는 x 각각의 원소를 대각원소로 가지는 $(k \times k)$ 행렬을 나타낸다.

product를 나타낸다. 그리고 다요인 Vasicek모형과 같이 $P_{0,t+n} = 1$ 의 경계조건으로부터 얻어지는 $\{A_0 = 0, B_0 = \mathbf{0}_{K \times 1}\}$ 인 초기조건을 이용하여 식 (3-27)의 차분방정식을 추차적으로 계산하면 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있고 이를 식 (3-26)에 대입하면 채권가격을 구할 수 있다.

이산시간 이자율 기간구조모형에서 단기이자율(r_t)과 1기간 무이표채 수익률의 관계($r_t = y_{1,t}$)와 식 (3-26)의 채권가격식을 이용하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$r_t \equiv y_{1,t} = A_1 + B_1' X_t \quad (3-28)$$

식 (3-27)로부터 $\left\{ A_1 = 0, B_1 = \mathbf{1} - \frac{1}{2} [(\lambda' \Sigma) \odot (\lambda' \Sigma)] \right\}$ 을 얻을 수 있으므로 식 (3-28)을 식 (3-29)와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$r_t = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{2} [(\lambda' \Sigma) \odot (\lambda' \Sigma)] \right)' X_t \quad (3-29)$$

상태변수의 지수선형방정식으로 제시된 식 (3-24)의 SDF를 단기이자율의 지수선형함수로 나타낼 수 있다.

$$-m_{t+1} = r_t + \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_t' \tilde{\lambda}_t + \tilde{\lambda}_t' \epsilon_{t+1} \quad (3-30)$$

여기에서 $\tilde{\lambda}_t = \lambda' \Sigma \text{diag}(\sqrt{X_t})$ 이다.

제 3 절 일반적인 이산시간 지수선형모형

여기서는 지금까지 살펴본 대부분의 모형을 포함하는 보다 일반적인 이산시간 이자율 기간구조모형인 지수선형모형(discrete time exponential affine term structure model, 이하 DATSM)을 살펴보기로 한다. Duffie and Kan(1996, 이하 DK)은 연속시간 이자율 기간구조모형에서 상태변수 X_t 에 대한 지수선형함수 형태의 해석적인 채권가격을 얻을 수 있는 필요충분조건을 제시하였다. 마찰적요인이 없는 완전시장(frictionless complete market)에서 무차익거래(absence of arbitrage opportunity) 조건이 충족되는 의 채권가격이 상태변수에 대한 지수선형함수로 얻어지기 위해 DK가 제시한 세 가지 필요충분조건은 다음과 같다.

- 단기이자율 r_t 는 상태변수벡터 X_t 의 선형함수이다.
- Q 측도 하에서 상태변수 확률과정 dX_t 의 추세함수는 상태변수벡터 X_t 의 선형함수이다.
- Q 측도 하에서 상태변수 확률과정 dX_t 의 조건부공분산행렬은 X_t 의 선형함수이다.

DK의 지수선형모형은 Dai and Singleton(2000, 이하 DS)의 연구에서 보다 일반적인 형태로 제시된다. DS는 이러한 DK의 조건을 충족하는 일반적인 지수선형모형(ATSM)모형에 대한 허용조건(admissibility condition)과 식별조건(identification condition)을 제시하였다. DS는 리스크프리미엄이 변동성 상태변수에만 의존하는 위험의 시장가격 설정을 제시하고 이러한 모형설정을 ‘completely affine’모형이라 하였다. 또한, 이러한 특성을 가지는 ‘completely affine’ ATSM모형에 대한 표준적인 형태(cannonical form)를 제시하였다⁷⁾.

7) DS(2000)의 연속시간 completely affine 이자율 기간구조모형에서 제시된 포

앞서 살펴본 이산시간 단일요인 Vasicek모형과 CIR모형은 연속시간 이자율 기간구조모형을 단순히 이산화한 모형이다. 따라서 지금까지 살펴본 이산시간 이자율 기간구조모형들은 모두 DK의 필요충분조건을 충족하는 모형이라 할 수 있다. 이처럼 연속시간모형을 이산화한 이산시간 모형들은 연속시간모형에 대한 실증분석에서 일반적으로 이용되는 추정 모형과 유사하다. 그러나 앞서 이산시간 단일요인 이자율 기간구조모형을 다요인 모형으로 확장한 이산시간 다요인 CIR모형에서와 같이 단순히 이산화한 모형은 실질적으로 여러 가지 제약을 가지는 한계점이 있다. 본 절에서는 동일한 특성을 가지는 상태변수의 수를 늘리는 방법으로 설정된 이산시간 다요인 Vasicek모형과 CIR모형을 포함하는 일반적인 DATSM을 살펴보고자 한다.

DK와 DS의 연속시간모형에 해당하는 이산시간모형은 Backus et al.(1998, 2001, 이하 BFT), Backus et al.(2001), Gallmeyer et al.(2005), Gallmeyer et al.(2007) 등에서 다루어진다. 특히, Gallmeyer et al.(2005)와 Gallmeyer et al.(2007)의 연구는 단기이자율을 정책변수로 하는 금리통화 정책준칙(Taylor rule 및 McCallum rule)에 포함되는 관측 가능한 거시경제변수들을 상태변수로하는 이산시간 다요인 이자율 기간구조모형에 대한 실증분석결과를 제시하고 있다. 아래에서 먼저 BFT(1998, 2001)에서 제시된 이산시간모형 설정의 특징과 한계점을 중심으로 일반화된 DATSM을 살펴보고자 한다. 그리고 BFT 이산시간모형의 한계점을 극복하는 모형

준형태인 $A_m(N)$ 모형에서 제약조건들은 허용조건과 식별조건을 모두 포함하고 있다. 이러한 제약조건들은 기본적으로 모든 상태변수들이 미관측변수라는 가정하에 부과되며 상태변수들이 관측변수와 미관측변수를 모두 포함하는 모형의 경우에는, 이러한 제약조건들은 기본적으로 미관측상태변수에 한하여 적용된다. BFT의 이산시간 이자율 기간구조모형도 DS의 이러한 제약조건들을 충족하도록 설정하는 것이 일반적이다. DS의 표준형태 $A_m(N)$ 모형에 부과되는 허용조건과 식별조건에 대한 자세한 논의는 Dai and Singleton(2000)의 부록을 참조할 수 있다. 또한, 본 논문 1부에 해당하는 ‘이자율 기간구조모형 설정 유효성 분석’의 제 2장 제 3절 p34에 제시되어 있다.

으로 Ang and Piazzesi(2003, 이하 AP)에서 제시된 이산시간모형을 살펴보기로 한다. AP는 인플레이션과 실물경제활동을 반영하는 다양한 거시경제변수에 대한 주성분 분석을 통하여 인플레이션요인과 거시경제요인을 추출하고, 이들 거시경제요인과 함께 미관측상태변수들이 테일러준칙에 따른 단기이자율결정에 영향을 줄 수 있는 모형을 설정한다. 이와 더불어 유연한 위험의 시장가격을 이용하여 이자율 기간구조모형을 추정하여 거시경제요인이 이자율기간구조에 미치는 영향을 분석하였다. 이러한 모형설정과 분석방법은 Ang et al.(2006), Ang et al.(2007), Bikhov and Chernov(2010), Chib and Ergashev(2009), Cochrane and Piazzesi(2005), Favero et al.(2010), Hördahl et al.(2006) 등의 거시금융-이자율기간구조(macro-finance interest rate term structure)연구에서 사용되었다.

1. BFT의 이산시간 지수선형모형

DK와 DS의 연속시간 이자율 기간구조모형에 해당하는 이산시간모형 설정을 위해 BFT (1998, 2001)가 제시한 SDF는 다음과 같다.

$$-m_{t+1} = \delta_0 + \delta' X_t + \lambda' \sqrt{S(X_t)} \epsilon_{t+1} \quad (3-31)$$

여기에서 $m_{t+1} = \log M_{t+1}$, δ_0 는 스칼라, δ 는 K 차원벡터, 상태변수 X_t 는 K 차원벡터, λ 는 위험에 대한 시장가격을 나타내는 K 차원 상수벡터 그리고 ϵ_{t+1} 는 독립이고 동일한 다변량 표준정규분포 $i.i.d.N(0, I)$ 를 따르는 확률변수이다. 식 (3-31)에서 $\sqrt{S(X_t)}$ 는 상태변수의 선형함수로 설정되는 값에 대한 제곱근을 대각원소로 가지는 $(K \times K)$ 대각행렬이다.

$$[S(X_t)]_{ii} = \alpha_i + \beta_i' X_t \quad (3-32)$$

여기에서 α_i 는 스칼라이며 β_i 는 K 차원 벡터이다. 식 (3-32)는 DS모형에서와 동일함을 알 수 있다. 그러나 BFT는 DS의 표준형태(canonical form)에 부과되는 조건들과 다르게 DK의 허용조건(Feller조건)을 부과할 것을 제시하고 있다. DK의 허용조건은 연속시간 CIR모형에서와 유사하게 i 번째 상태변수의 조건부분산이 0이 되는 경우 i 번째 상태변수의 추세함수가 충분히 큰 값을 가지도록 $\beta_i'(I - \Phi)(\theta - X) > \beta_i'\beta_i/2$ 의 제약조건을 충족하여야 하며, β_i 의 $j \neq i$ 번째 원소가 0이 아닌 경우 $S(X_t)_{ii}$ 와 $S(X_t)_{jj}$ 이 서로 양의 비례관계를 가져야 한다는 제약조건이다. 일반적으로 DS의 표준형태를 따르도록 이산시간모형을 설정하는 경우 DS의 허용조건을 부과하는 것이 가능하다.

투자자가 이용가능한 경제상황에 대한 정보를 나타내는 K 차원의 상태변수는 P 측도 하에서 시변조건부이분산성을 가지는 VAR(1) 과정으로 정의된다.

$$X_{t+1} = (I - \Phi)\theta + \Phi X_t + \Sigma \sqrt{S(X_t)} \epsilon_{t+1} \quad (3-33)$$

여기에서 지속성 파라미터 Φ 는 안정성 조건을 충족하도록 양의 대각원소를 가지는 $(K \times K)$ 행렬로 설정된다. 그리고 장기평균을 나타내는 파라미터 θ 는 K 차원의 벡터이며, Σ 는 $(K \times K)$ 항등행렬이 된다. 식 (3-33)의 상태변수 동태방정식에서 식 (3-32)와 같은 조건부표준편차함수에 영향을 주는 상태변수 설정, 즉 0이 아닌 것으로 설정되는 β_i 의 원소에 따라서 조건부표준편차에 영향을 주는 상태변수의 수가 다르게 설정될 수 있는 특징을 가지고 있다. 연속시간 이자율 기간구조모형에서의 이러한 특성은 DS에서 표준형태로 제시되고 있다. 이를 고려하면 식 (3-33)과 같이 상태변수의 동태방정식을 가정하는 이산시간 이자율 기간구조모형은 이산시간 단일요인 Vasicek모형과 이산시간 단일요인 CIR모형의 합성모형으로모형임을 의미한다.

BFT는 DK의 허용조건과 유사하게 상태변수의 조건부분산(조건부표준편차)이 항상 비음(non-negative)이 되도록 하는 충분조건을 제시하고 있다.

$$\kappa_{ii} \theta_i + \sum_{j \neq i}^K (\theta_j - X_j) > 0, \quad i \in \{1, \dots, K\} \quad (3-34)$$

여기에서 $\kappa = I - \Phi$ 로 κ_{ii} 는 κ 의 대각원소를 나타낸다. 식 (3-34)는 연속 시간모형에서의 허용조건과 유사한 다음의 제약조건을 의미한다.

$$\begin{cases} \kappa_{ii} = 1 - \phi_{ii} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, K \\ \kappa_{ij} = -\phi_{ij} < 0, \quad \forall j \neq i, \quad i, j = 1, \dots, K \end{cases}$$

이러한 제약조건은 무엇보다 \mathbf{P} 측도 하에서 상태변수가 단위근(unit root)을 가지는 불안정시계열이 되지 않도록 하기위한 것이다.

BFT모형은 지수선형모형이므로 t 시점의 잔존만기가 n 인 무이표채가격($P_{n,t}$)은 다음과 같이 상태변수에 대한 지수선형이다..

$$P_{n,t} = \exp [- A_n - B_n' X_t] \quad (3-35)$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 시점 t 에는 의존하지 않고 채권의 잔존만기(n)에만 의존하는 함수로 각각 스칼라함수와 K 차원의 벡터함수이다.

식 (3-31)의 SDF, 식 (3-33)의 상태변수에 대한 동태방정식, 그리고 식 (3-35)의 채권가격식을 기초채권가격결정식에 대입한 다음, 로그정규분포의 성질을 이용하여 정리하면 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 다음과 같은 차분방정식체계를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = \delta_0 + A_{n-1} + B_{n-1}'(I - \Phi)\theta - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K (\lambda_j + B_{n-1,j})^2 \alpha_j \\ B_n = \delta + \Phi' B_{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K (\lambda_j + B_{n-1,j})^2 \beta_j \end{cases} \quad (3-36)$$

여기에서 $B_{n,j}$ 는 K 차원벡터인 B_n 의 j 번째 원소를 나타낸다. 그리고 $P_{0,t+n} = 1$ 의 경계조건으로부터 얻어지는 $\{A_0 = 0, B_0 = \mathbf{0}_{K \times 1}\}$ 의 초기조건을 이용하여 식 (3-36)의 차분방정식을 추차적으로 계산하면 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있다. 식 (3-36)과 초기조건을 이용하면 $\left\{A_1 = \delta_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j^2 \alpha_j, B_1 = \delta - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j^2 \beta_j\right\}$ 을 얻을 수 있다. 이를 이용하면 단기이자율은 다음과 같다.

$$y_{1,t} \equiv r_t = \left(\delta_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j^2 \alpha_j \right) + \left(\delta - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j^2 \beta_j \right)' X_t \quad (3-37)$$

이와 같은 방법으로 잔존만기 2기간 무이표채수익률($y_{2,t}$)을 구하고 이를 이용하여 이자율 기대가설에 따른 리스크프리미엄($\xi_t^{(2)}$)을 얻을 수 있다. 먼저 이자율기대가설에 따른 리스크프리미엄은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} y_{2,t} &\equiv \frac{1}{2} [r_t + E_t[r_{t+1}]] + \xi_t^{(2)} \\ &= \frac{1}{2} [A_1 + B_1' X_t + A_1 + B_1' E_t[X_{t+1}]] + \xi_t^{(2)} \\ &= A_1 + \frac{1}{2} [B_1'(I - \Phi)\theta + B_1'(I + \Phi)X_t] + \xi_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3-38)$$

또한 식 (3-35)를 통해 얻은 2-기간 무이표채수익률($y_{2,t}$)은 다음과 같다.

$$y_{2,t} = \frac{A_2}{2} + \frac{B_2'}{2} X_t \quad (3-39)$$

식 (3-39)를 식 (3-38)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 2기간 무이표채에 대한 리스크프리미엄을 얻을 수 있다.

$$\xi_t^{(2)} = \sum_{i=1}^K \Gamma_i (\alpha_i + \beta_i' X_t) \quad (3-40)$$

여기에서 $\Gamma_i = -\frac{1}{2} \left(\delta_i - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^K \lambda_j^2 \beta_j' \right]_i \right) \left(\lambda_i + \frac{1}{2} \left(\delta_i - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^K \lambda_j^2 \beta_j' \right]_i \right) \right)$ 이며 $[\cdot]_i$ 는 해당 벡터의 i 번째 원소를 나타낸다. 이와 동일한 방법으로 일반적인 n 기간 무이표채에 대한 리스크프리미엄을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi_t^{(n)} &= y_{n,t} - \frac{1}{n} [(n-1)y_{n-1,t} + E_t[r_{t+n-1}]] \\ &= \frac{A_n - A_{n-1}}{n} - \frac{B_n' - B_{n-1}'}{n} X_t - \frac{1}{n} E_t[r_{t+n-1}] \end{aligned} \quad (3-41)$$

식 (3-41)에서 리스크프리미엄은 식 (3-33)의 상태변수에 대한 동태방정식에서 시변이분산성을 가지는 상태변수의 조건부분산(조건부표준편차)과 시변이분산항을 포함하고 있는 식 (3-31)의 SDF에 의존한다는 것을 알 수 있다. 따라서 리스크프리미엄이 시변이분산을 유발하는 상태변수, 즉 $\sqrt{S(X_t)}$ 의 대각원소에 포함되는 상태변수에만 의존함을 알 수 있다. 만일 $\{\beta_i = \mathbf{0}, \forall i = 1, \dots, K\}$ 인 시변이분산항이 존재하지 않는 경우, 리스크프리미엄은 채권의 잔존만기(n)에만 의존하는 상수함수가 된다.

리스크프리미엄이 시변조건부이분산성을 유발하는 상태변수에만 의존하도록 모형이 설정되는 경우 이산시간 이자율 기간구조모형은 시변조건

부변동성과 시변리스크프리미엄을 어느 정도 설명할 수 있다. 하지만 현실의 이자율기간구조 자료들이 보여주는 전형적인 특징 가운데 하나인 리스크프리미엄의 부호가 변하는 현상은 설명할 수 없는 한계를 가진다. 이같이 BFT의 이산시간모형이 가지는 한계점은 DK와 DS의 연속시간모형이 가지고 있는 한계점과 사실상 동일하다. BFT모형은 조건부변동성을 유발하는 상태변수의 수가 많아질수록 DS의 연속시간모형에서와 같이 상태변수들 사이의 음의 상관관계를 허용하지 않게 된다. 즉, DS모형과 동일하게 모든 상태변수들이 조건부변동성을 유발할 수 있도록 설정하는 경우, 상태변수들의 상관관계는 항상 양이 되어 현실에서 관측되는 이자율기간구조의 형태적인 특성을 포착할 수 없다. 또한, 연속시간모형에서는 변동성을 유발하는 상태변수가 항상 비음의 값을 가지도록 설정하는 것이 가능하지만 이를 이산변환(discrete transform)한 이산시간모형의 경우에는 변동성을 유발하는 상태변수가 양의 확률로 음의 값을 가질 수 있는 추가적인 문제점이 있다.

다음에서는 BFT의 이산시간모형에 포함되는 이산시간 다요인 이자율기간구조모형들에 대해서 간략하게 살펴보기로 한다. 식 (3-31)~식 (3-33) 그리고 식 (3-35)와 같은 모형설정을 가지는 BFT모형은 다요인 Vasicek모형이나 다요인 CIR모형이외에도 미관측상태변수에 대한 명시적인 명명이나 해석(explicit labeling or interpretation)이 가능한 연속시간 이자율 기간구조모형을 이산화한 이산시간 이자율 기간구조모형을 포함한다. 미관측상태변수에 대한 명시적인 명명이나 해석이 가능한 연속시간 이자율 기간구조모형으로는 Beaglehole and Tenny(1991)와 Jegadeesh and Pennacchi(1996) 등의 Gaussian central tendency 모형, Balduzzi et al.(1998)의 CIR central tendency 모형, Fong and Vasicek(1991)의 stochastic volatility 모형, Lund(1999)의 stochastic market price of risk 모형, Balduzzi et al.(1996)의 central tendency and stochastic volatility 모형 등이 있다. 이들 연속시간 이자율 기간구조모형을 이산화한 모형에 대해 간략히 살펴보기로 한다.

(1) CIR central tendency 모형

Balduzzi et al.(1998)은 이자율과 이자율의 평균이 모두 비음의 값을 가지도록 하는 연속시간 CIR central tendency 모형을 제시하였다. Balduzzi et al.(1998)의 연속시간모형을 이산화한 모형은 다음과 같다.

$$\begin{cases} -m_{t+1} = \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \sigma_1^2\right) x_{1t} + \left(\frac{1}{2} \lambda_2^2 \sigma_2^2\right) x_{2t} + \lambda_1 \sigma_1 \sqrt{x_{1t}} \epsilon_{1t+1} + \lambda_2 \sigma_2 \sqrt{x_{2t}} \epsilon_{2t+1} \\ x_{1t+1} = (1 - \phi_1) x_{2t} + \phi_1 x_{1t} + \sigma_1 \sqrt{x_{1t}} \epsilon_{1t+1} \\ x_{2t+1} = (1 - \phi_2) \theta_2 + \phi_2 x_{2t} + \sigma_2 \sqrt{x_{2t}} \epsilon_{2t+1} \end{cases} \quad (3-42)$$

식 (3-42)에서 $r_t = x_{1t}$ 가 되어 단기이자율이 첫 번째 상태변수로 설정된다. 또한, 두 번째 상태변수는 단기이자율이 회귀하는 시변평균이자율로 해석할 수 있다. 이러한 특성으로 인해 식 (3-42)의 모형을 ‘CIR central tendency 모형’이라 한다. 식 (3-42)는 식 (3-31)의 SDF에서 $\delta_0 = 0$, $\delta = (1 + \lambda_1^2 \sigma_1^2 / 2, \lambda_2^2 \sigma_2^2 / 2)'$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = (\sigma_1^2, 0)'$, $\beta_2 = (0, \sigma_2^2)'$ 으로 설정한 경우이다.

(2) Stochastic volatility 모형

Fong and Vasicek(1991)은 단기이자율과 그 조건부변동성을 상태변수로 가지는 모형을 제시하였다. 이를 이산화한 모형은 다음과 같다.

$$\begin{cases} -m_{t+1} = x_{1t} + \left(\frac{\lambda_1^2}{2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_2^2}{2}\right) x_{2t} + \lambda_1 \sqrt{x_{1t}} \epsilon_{1t+1} + \lambda_2 \sigma_2 \sqrt{x_{2t}} \epsilon_{2t+1} \\ x_{1t+1} = (1 - \phi_1) \theta_1 + \phi_1 x_{1t} + \sqrt{x_{2t}} \epsilon_{1t+1} \\ x_{2t+1} = (1 - \phi_2) \theta_2 + \phi_2 x_{2t} + \sigma_2 \sqrt{x_{2t}} \epsilon_{2t+1} \end{cases} \quad (3-43)$$

식 (3-43)에서도 $r_t = x_{1t}$ 이 되어 단기이자율이 첫 번째 상태변수가 된다. 그리고 두 번째 상태변수는 첫 번째 상태변수의 조건부분산으로 설정되어 있음을 알 수 있다. 이러한 특성으로 인해 식 (3-43)을 확률변동성모형이라고 한다. 그러나 조건부변동성 x_{2t} 가 주어진 것으로 볼 때 x_{1t} 의 동태방정식은 이산시간 Vasicek모형과 같이 설정되어 있으므로 단기이자율이 음의 값을 가질 수 있다. 그리고 식 (3-43)은 식 (3-31)의 SDF에서 $\delta_0 = 0$, $\delta = (1, \lambda_1^2/2 + \lambda_2^2\sigma_2^2/2)'$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = (0, 1)'$, $\beta_2 = (0, \sigma_2^2)'$ 으로 설정한 경우이다.

(3) Longstaff and Schwartz 모형

Longstaff and Schwartz(1992)는 일반균형모형을 이용한 연속시간 이자율 기간구조모형에서 독립적인 2요인 CIR모형을 제시하였다. Longstaff and Schwartz 모형의 특징은 위험의 시장가격 가운데 하나를 0으로 제약하고 있다는 것이다. 이러한 연속시간 이자율 기간구조모형을 이산화한 이산시간모형은 다음과 같이 설정된다.

$$\begin{cases} -m_{t+1} = \left(1 + \frac{\lambda_1^2\sigma_1^2}{2}\right)x_{1t} + x_{2t} + \lambda_1\sigma_1\sqrt{x_{1t}}\epsilon_{1t+1} \\ x_{1t+1} = (1 - \phi_1)\theta_1 + \phi_1x_{1t} + \sigma_1\sqrt{x_{1t}}\epsilon_{1t+1} \\ x_{2t+1} = (1 - \phi_2)\theta_2 + \phi_2x_{1t} + \sigma_2\sqrt{x_{2t}}\epsilon_{2t+1} \end{cases} \quad (3-44)$$

식 (3-44) 모형에서 단기이자율은 $r_t = x_{1t} + x_{2t}$ 로 상태변수의 합으로 정의된다. 식 (3-44)는 식 (3-31)의 SDF에서 $\delta_0 = 0$, $\delta = (1 + \lambda_1^2/2, 1)'$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = (\sigma_1^2, 0)'$, $\beta_2 = (0, \sigma_2^2)'$, $\lambda_2 = 0$ 으로 설정한 것이다. 단기이자율이 상태변수의 합으로 설정되므로 단기이자율이 관측가능한 것

으로 가정할 경우, 이를 이용하여 단기이자율의 1-기간 조건부분산을 구할 수 있으며, 이는 미관측상태변수와 다음과 같은 관계를 충족한다.

$$\begin{cases} r_{t+1} \equiv y_{1t+1} = x_{1t+1} + x_{2t+1} \\ Var_t(y_{1,t+1}) = \sigma_1^2 x_{1t} + \sigma_2^2 x_{2t} \end{cases} \quad (3-45)$$

Longstaff and Schwartz모형은 식 (3-45)의 관계를 충족하는 단기이자율과 그 조건부분산을 이용하여 미관측상태변수에 대해서 풀 수 있고, 이를 이용하여 미관측상태변수에 대한 해석적인 유추가 가능하다.

2. AP의 이산시간 지수선형모형

BFT의 이산시간 이자율 기간구조모형 설정의 가장 큰 한계점은 리스크프리미엄이 변동성을 유발하는 상태변수에만 의존한다는 점과 이로 인해 리스크프리미엄의 부호가 시간불변이라는 것이다. 또한 DK와 DS의 연속시간 이자율 기간구조모형에서와 같이 BFT모형도 현실에서 관측되는 이자율기간구조의 다양한 형태적인 특성을 포착하기 위해서 요구되는 상태변수들의 음의 상관관계와 조건부확률변동성을 충분히 포착하기 위한 모형 설정 사이의 상충관계(trade-off)문제를 가지고 있다. Duffee(2002)는 연속시간 이자율 기간구조모형에서 이러한 한계점을 극복하는 위험의 시장가격설정을 제안하고 이를 ‘essentially affine’ 모형이라 하였다. 이산시간 이자율 기간구조모형에서도 Ang and Piazzesi(2003)에 의해 Duffee(2002)의 ‘essentially affine’ 모형과 같은 유연한 위험의 시장가격설정이 제시되었다. 본 절에서는 BFT의 이산시간모형의 한계점을 극복하는 AP의 이산시간 이자율 기간구조모형에 대해서 간략하게 살펴보기로 한다.

AP는 단기이자율을 이용하여 SDF를 다음과 같이 설정하였다.

$$-m_{t+1} = r_t + \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + \lambda_t' \epsilon_{t+1} \quad (3-46)$$

여기에서 $m_{t+1} = \log M_{t+1}$, r_t 는 단기이자율, λ_t 는 K 차원 벡터로 위험의 시변시장가격 그리고, ϵ_{t+1} 는 독립이고 동일한 다변량 표준정규분포 $i.i.d.N(0, I)$ 를 따르는 확률변수이다. 식 (3-46)의 SDF에 포함된 단기이자율은 다음과 같이 미관측상태변수의 선형함수이다.

$$r_t = \delta_0 + \delta' X_t \quad (3-47)$$

여기에서 δ_0 는 스칼라이며 δ 는 K 차원의 벡터 그리고 X_t 는 K 차원의 미관측상태변수이다. 식 (3-47)의 단기이자율을 식 (3-46)의 SDF에 대입하면 Balduzzi et al.(1981, 이하 BDF)에서 설정한 SDF와 유사해진다. AP의 모형을 BDF와 구분시켜주는 특징은 아래와 같은 위험의 시변시장가격 λ_t 이다.

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda' X_t \quad (3-48)$$

여기에서 λ_0 는 스칼라이며 λ 는 K 차원의 벡터이다. 식 (3-48)은 모든 상태변수들이 위험의 시장가격에 영향을 줄 수 있음을 의미한다. 이는 변동성 상태변수들만 상태변수의 조건부분산을 통하여 위험의 시장가격에 영향을 주는 BFT의 모형설정과 확연히 다른 특징이다.

AP는 경제상황에 대한 정보를 나타내는 K 차원의 상태변수벡터 X_t 가 P 측도 하에서 다음과 같은 등분산성을 가지는 VAR(1) 과정(homoskedastic vector autoregressive process of order 1)을 따른다.

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Sigma \epsilon_{t+1} \quad (3-49)$$

여기서 μ 는 K 차원의 벡터, 지속성 파라미터 Φ 는 $(K \times K)$ 행렬 그리고 Σ 는 상태변수의 조건부분산 $Var_t(X_{t+1}) = \Sigma \Sigma'$ 를 충족하는 $(K \times K)$ 행렬이다. AP의 이산시간 이자율 기간구조모형은 식 (3-49)로 인해 이산시간 다요인 Vasicek모형과 유사하게 이자율기간구조의 확률변동성을 설명할 수 없는 한계를 가진다. 그리고 AP 모형 또한 지수선형모형이므로 t 시점의 잔존만기가 n 인 무이표채가격($P_{n,t}$)은 상태변수에 대한 지수선형모형으로 다음과 같이 결정된다.

$$P_{n,t} = \exp \left[-A_n - B_n' X_t \right] \quad (3-50)$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 시점 t 에는 의존하지 않고 채권의 잔존만기(n)에만 의존하는 함수로 각각 스칼라함수와 K 차원의 벡터함수이다.

식 (3-46)~식 (3-50)를 기초채권가격결정식에 대입한 다음, 로그정규분포의 성질을 이용하여 정리하면 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 다음과 같은 차분방정식체계를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = \delta_0 + A_{n-1} + B_{n-1}' (\mu - \Sigma \lambda_0) - \frac{1}{2} B_{n-1}' \Sigma \Sigma' B_{n-1} \\ B_n = \delta + (\Phi - \Sigma \lambda')' B_{n-1} \end{cases} \quad (3-51)$$

$P_{0,t+n} = 1$ 의 경계조건으로부터 얻어지는 $\{A_0 = 0, B_0 = \mathbf{0}_{K \times 1}\}$ 의 초기조건을 이용하여 식 (3-51)의 차분방정식을 추차적으로 계산하면 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있다.

AP모형에서 채권가격이 식 (3-50)과 같이 지수선형모형이므로 채권 수익률과 상태변수의 조건부평균도 상태변수의 선형함수이므로 채권의 기대초과보유수익률(excess holding period returns) 또한 상태변수에 대한 선형함수이다. 이는 다음과 같이 정의되는 초과보유수익률을 통해서 확인할 수 있다.

$$er_{t+1}^{(n)} = \log\left(\frac{P_{n-1,t+1}}{P_{n,t}}\right) - r_t = n y_{nt} - (n-1)y_{n-1,t+1} - r_t$$

위식에 대하여 조건부기대치를 취하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$E_t \left[er_{t+1}^{(n)} \right] = - \underbrace{\frac{1}{2} B_{n-1}' \Sigma \Sigma' B_{n-1} - B_{n-1}' \Sigma \lambda_0}_{A_n^x} + \underbrace{- B_{n-1}' \Sigma \lambda X_t}_{B_n^{x'}} \quad (3-52)$$

식 (3-52)에서 마지막 세 번째 항은 시변리스크프리미엄을 나타낸다. 시변리스크프리미엄은 $(K \times K)$ 행렬 λ 에 의해 결정됨을 알 수 있다.

AP의 거시금융 이자율 기간구조모형은 1차 적률(first moment)을 중심으로 한 거시경제변수와 금융정책을 나타내는 미관측상태변수들의 충격반응함수 분석에 목적을 둔 모형이므로 2차적률(second moment)로 특징지어지는 이자율기간구조의 전형적인 특성을 설명하기 어렵다. 따라서 VaR(value at risk)계산 등과 같은 리스크관리를 목적으로 하는 활용에는 제한이 있다고 할 수 있다.

지금까지 살펴본 이산시간 이자율 기간구조모형은 기본적으로 단기이자율이 상태변수에 대한 선형함수이므로 경기변동, 통화정책변화 등에 따른 이자율기간구조의 비선형·비대칭적인(nonlinear or asymmetric) 특성을 설명하지 못한다. 이러한 한계를 극복하기 위한 방법으로 Bansal and Zhou(2002), Bansal et al.(2004), Ang et al(2008), Dai et al.(2007), Monfort and Pegoraro(2006b, 2007) 등은 국면전환(regime switching) ATSM을 제안하였다. Bansal and Zhou(2002), Bansal et al.(2004)의 연구에서 제시된 국면전환 ATSM은 연속시간 다요인 CIR모형을 이산화한 모형이다. 이들 연구에서는 국면전환확률을 상수로 설정하며 국면전환에 따른 위험의 시장가격을 0으로 하는 한계점을 가지고 있다. 또한 식 (3-50)의 지수선형모형으로 설정된 채권가격식에서 B_n 그리고 식 (3-48)

의 시변시장가격식에서 λ 가 모두 국면전환에 의존하도록 설정하여 정확한 형태(exact form)의 무이표채수익률($y_{n,t}$)을 얻을 수 없다⁸⁾. 따라서 이들 국면전환 ATSM들은 비대칭성을 반영하기에 충분하지 않을 수 있다. Ang et al.(2008), Dai et al.(2007), Monfort and Pegoraro(2006b, 2007)의 연구에서는 AP(2000)의 ATSM을 확장한 국면전환 모형과 이에 대한 실증분석결과를 제시하고 있다. Ang et al.(2008)의 연구에서는 P 측도 하에서 국면전환확률을 상수로 가정하고 있음에 반해 Dai et al.(2007)의 연구에서는 P 측도 하에서 국면전환확률을 시변하는 것으로 설정하고 있다. 이러한 차이점 외에도 두 연구는 다소 상이한 국면전환 예측·필터링(prediction and filtering of regime switching)을 이용한다. 특히 Dai et al.(2007)과 Monfort and Pegoraro(2006b, 2007)의 연구에서 제시된 모형은 연속시간모형의 상사모형(continuous time model analog)이 아닌 이산시간 지수선형과정(discrete time exponential affine process)을 이용한 정확한 이산시간모형(exact discrete time model)이라는 점에서 크게 구분된다. 정확한 이산시간 이자율 기간구조모형은 이후 보다 자세히 살펴볼 것이다.

제 4 절 이산시간 지수이자 가우시언모형

연속시간 이자율 기간구조모형에서 ATSM은 비선형성과 확률변동성 등 2차 이상의 적률을 설명하는데 충분하지 않을 수 있으며 조건부확률 변동성과 상태변수들의 상관관계 사이의 상충관계(trade-off)와 같은 문제점을 내포하고 있다. 이들을 극복하는 모형으로 Ahn et al.(2002)(이하 ADG), Leippold and Wu(2002) 등은 Longstaff(1989), Beaglehole and Tenney(1991)와 Constantinide(1992) 등이 제시한 모형을 일반화한 가우시언 QTSM을 제시하였다. 앞서 살펴본 이산시간 지수선형 이자율 기간

8) Bansal and Zhou(2002)는 로그선형근사(log-linear approximation)를 이용하여 무이표채수익률을 구하는 방법을 이용하였다.

구조모형(DATSM)은 연속시간모형에 대한 상사모형이므로 연속시간 ATSM이 가지는 한계점과 문제점을 그대로 가지고 있다. Realdon(2006), Ang et al.(2008, 이하 ABD)은 이산시간 ATSM이 가지는 문제점을 해결하는 모형으로 ADG의 가우시언 QTSM을 이산변환 시킨 이산시간 지수이차 가우시언모형(discrete time exponential quadratic gaussian term structure model, 이산시간 QTSM)을 제시하였다. 특히 ABD는 테일러준칙설정에서 인플레이션율과 GDP갭의 계수가 연속적으로 시변하는 것을 포착하기위해 인플레이션율, GDP갭, 그리고 이들의 시변계수를 상태변수로 하는 이산시간 QTSM을 제시하고 있다. 또한 ABD는 이산시간 QTSM을 추정하기위한 베이지언 추론 알고리즘과 이를 이용한 실증분석 결과를 제시하고 있다. 본 절에서는 상태변수가 미관측변수라고 가정하는 ABD에서 제시된 이산시간 QTSM을 중심으로 모형설정의 특징을 살펴보기로 한다.

ABD는 이산시간 QTSM설정에 필요한 SDF를 다음과 같이 가정한다.

$$-m_{t+1} = r_t + \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + \lambda_t' \epsilon_{t+1} \quad (3-53)$$

여기에서 $m_{t+1} = \log M_{t+1}$, r_t 는 단기이자율, λ_t 는 K 차원 벡터로 위험의 시변시장가격 그리고, ϵ_{t+1} 는 독립이고 동일한 다변량 표준정규분포 $i.i.d.N(0, I)$ 를 따르는 확률변수이다. 식 (3-53)는 AP의 SDF와 형태가 동일함을 할 수 있다. 그러나 식 (3-53)에 포함된 단기이자율은 미관측상태변수의 이차형식 (quadratic form)이라는 점에서 AP의 SDF와 확연히 다른 특징을 가진다.

$$r_t = \alpha + \beta' X_t + X_t' \Psi X_t \quad (3-54)$$

여기에서 α 는 스칼라, β 는 K 차원의 벡터, Ψ 는 $(K \times K)$ 대칭행렬 그리고

X_t 는 K 차원의 미관측상태변수이다. ADG의 연속시간 QTSM에서와 같이 단기이자율이 음의 값을 가지지 않도록 하기 위하여 $\alpha - \frac{1}{4} \beta' \Psi \beta \geq 0$ 의 조건이 만족되고, Ψ 가 양반정부호행렬(positive semi-definite matrix)제약이 필요하다. 그리고 ABD은 다음과 같은 위험의 시변시장가격 λ_t 를 설정하였다.

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda' X_t \quad (3-55)$$

여기에서 λ_0 는 스칼라이며 λ 는 K 차원의 벡터이다. ABD는 ADG의 연속시간모형에서와 같이 K 차원의 상태변수벡터 X_t 가 실질측도 \mathbf{P} (physical measure \mathbf{P})하에서 다음과 같은 등분산성을 가지는 VAR(1)과정을 따르는 것으로 가정하였다.

$$X_{t+1} = \mu + \Phi X_t + \Sigma \epsilon_{t+1} \quad (3-56)$$

여기에서 μ 는 K 차원의 벡터, 지속성 파라미터 Φ 는 $(K \times K)$ 행렬 그리고 Σ 는 상태변수의 조건부분산 $Var_t(X_{t+1}) = \Sigma \Sigma'$ 를 충족하는 $(K \times K)$ 행렬이다. 식 (3-53)~식 (3-56)에서도 ADG의 연속시간 QTSM에 적용되는 식별조건과 허용조건이 동일하게 적용된다. 다만 상태변수가 관측변수와 미관측변수로 구성되는 경우에는 미관측변수에 해당하는 부분에만 이러한 식별조건이 적용된다⁹⁾. 식 (3-53)의 SDF, 식 (3-54)의 단기이자율, 식 (3-55)의 위험의 시변시장가격, 그리고 식 (3-56)의 VAR(1) 과정을 따르는 상태변수 X_t 의 동태방정식으로부터 다음과 같은 지수이차형식 (exponential quadratic form)의 잔존만기가 n 인 무이표채가격을 얻을 수 있다¹⁰⁾.

9) 미관측상태변수를 가정하는 연속시간 QTSM의 식별조건, 허용조건 그리고 불변 변환(invariant transform)에 대한 보다 자세한 논의는 Ahn et al.(2002)의 부록을 참조할 수 있다.

10) 식 (3-57)의 채권가격식은 앞서 살펴본 이산시간모형의 채권가격식과 다소 상이

$$P_{n,t} = \exp(A_n + B_n' X_t + X_t' C_n X_t) \quad (3-57)$$

여기에서 A_n 는 스칼라, B_n 는 K 차원 벡터, C_n 는 $(K \times K)$ 행렬이다.

식 (3-53)~식 (3-57)을 \mathbf{P} 측도 하에서 정의되는 기초채권가격결정식에 대입한 다음 로그정규분포의 성질을 이용하여 정리하면 $\{A_n, B_n, C_n\}$ 에 대한 차분방정식체계를 얻는 방법을 적용할 수 있다¹¹⁾. 하지만 ABD는 이러한 방법을 따르지 않고 다음과 같은 Q 측도 하의 기초채권가격결정식을 이용한다.

$$P_{n,t} = E_t^P [M_{t+1} P_{n-1,t+1}] \equiv \exp(-r_t) E_t^Q [P_{n-1,t+1}] \quad (3-58)$$

여기에서 $E_t^P[\cdot]$ 와 $E_t^Q[\cdot]$ 는 각각 \mathbf{P} 측도와 Q 측도 하의 조건부기대치를 나타낸다. 식 (3-58)에서 $E_t^Q[\cdot]$ 에 포함된 채권가격($P_{n-1,t+1}$)은 Q 측도 하에서 정의되는 상태변수로 설정된 채권가격식을 의미한다. 연속시간모형에서 적용된 Girsanov정리(Girsanov theorem)를 준용하여 아래와 같은 Q 측도 하의 상태변수 동태방정식을 얻을 수 있다.

$$X_{t+1} = \mu^Q + \Phi^Q X_t + \Sigma \epsilon_{t+1}^Q \quad (3-59)$$

여기에서 ϵ_{t+1}^Q 는 Q 측도 하에서 정의된 $i.i.d.N(0, I)$ 를 따르는 확률변수

하계 상수항과 상태변수의 적재벡터(loading vector)와 적재행렬(loading matrix)에 음의 부호가 아닌 양의 부호로 설정되어 있다. 이는 음의 부호를 가지도록 하는 것과 실질적으로 아무런 차이가 없지만 ABD의 가정을 따른 것이다. 이러한 설정은 ADG의 연속시간모형에서 적용되는 식별조건, 허용조건, 불변변환 등을 이산시간모형에 준용하는데 편리하다.

11) 실질측도 \mathbf{P} 하에서 정의되는 기초채권가격결정식을 이용하여 $\{A_n, B_n, C_n\}$ 에 대한 차분방정식체계를 유도하는 경우, 위험중립측도 Q 하에서 정의되는 상태변수의 동태방정식의 μ^Q 와 Φ^Q 에 포함되는 $\{\mu, \Phi, \Sigma, \lambda_0, \lambda\}$ 를 대입하여 정리하면 된다.

이다. 식 (3-59)의 $\{\mu^Q, \Phi^Q\}$ 는 $\{\mu, \Phi\}$ 에 대해 다음과 같은 관계를 충족한다.

$$\begin{cases} \mu^Q = \mu - \Sigma \lambda_0 \\ \Phi^Q = \mu - \Sigma \lambda \end{cases}$$

Q 측도 하의 상태변수 동태방정식 식 (3-59)과 단기이자율 식 (3-54)를 Q 측도 하의 기초채권가격결정식 식 (3-58)에 대입한 다음, 로그정규분포의 성질을 이용하면 $\{A_n, B_n, C_n\}$ 에 대한 다음의 차분방정식체계를 얻을 수 있다¹²⁾.

$$\begin{cases} A_n = -\alpha + A_{n-1} + B_{n-1}' \mu^Q + \mu^{Q'} C_{n-1} \mu^Q - \frac{1}{2} \ln \det(I - 2\Sigma' C_{n-1} \Sigma) \\ \quad + \frac{1}{2} (\Sigma' B_{n-1} + 2\Sigma' C_{n-1} \mu^Q)' (I - 2\Sigma' C_{n-1} \Sigma)^{-1} (\Sigma' B_{n-1} + 2\Sigma' C_{n-1} \mu^Q) \\ B_n = -\beta + \mu^{Q'} B_{n-1} + 2\mu^{Q'} C_{n-1} \mu^Q + 2\Phi^Q C_{n-1} \Sigma (I - 2\Sigma' C_{n-1} \Sigma)^{-1} (\Sigma' B_{n-1} + 2\Sigma' C_{n-1} \mu^Q) \\ C_n = -\Psi + \Phi^{Q'} C_{n-1} \Phi^Q + 2(\Sigma' C_{n-1} \Phi^Q)' (I - 2\Sigma' C_{n-1} \Sigma)^{-1} (\Sigma' C_{n-1} \Phi^Q) \end{cases} \quad (3-60)$$

식 (3-60)은 ADG의 연속시간 QTSM에서 상미분방정식체계에 상응하는 차분방정식체계이다.

ADG의 연속시간 QTSM과 ABD의 이산시간 QTSM은 상태변수와 채권수익률이 1대 1로 대응되지 않는 이차형식의 구조를 가지고 있으므로 이들을 추정하는 것이 일반적으로 쉽지 않다. 추정상의 어려움으로 인해 Leippold

12) $\{A_n, B_n, C_n\}$ 에 대한 차분방정식체계를 유도하는 과정에서 다음과 같은 다변량 정규분포를 따르는 확률변수의 지수이차형식의 기대치에 대한 성질이 이용된다.

$$E[\exp(\lambda' \epsilon + \epsilon' \Gamma \epsilon)] = \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \det(I - 2\Psi \Gamma) + \frac{1}{2} \lambda' (\Psi^{-1} - 2\Gamma)^{-1} \lambda \right]$$

여기에서 $\epsilon \sim N(0, \Psi)$ 이다.

and Wu(2002)는 일부의 적률조건만을 이용하는 GMM(Generalized Method of Moments)을 이용하였으나 GMM은 충분한 적률조건을 수를 결정하기 어렵기 때문에 비효율적인 추정방법이라고 할 수 있다. ADG는 효율적인 추정을 위해 SNP보조모형(semi-nonparametric auxiliary model)을 이용하는 간접 추론 추정법인 EMM(Efficient Method of Moments)을 이용하고 있다. 그러나 EMM 또한 보조모형 선택과정에서 효율성이 상실 될 수 있는 추정 방법이다. ABD은 이산시간 QTSM에 대한 추정을 위해 MCMC를 이용한 베이지언 추론방법을 이용하고 있다. MCMC를 이용한 베이지언 추정은 이론적인 측면에서 효율적일 뿐만 아니라 이산시간 QTSM과 같이 비교적 많은 수의 파라미터를 포함하는 모형에 대한 현실적인 추정방법이라 할 수 있겠다.

제 4 장 정확한 이산시간 이자율 기간구조모형

지금까지 살펴본 이산화모형들은 연속시간모형과 동일한 형태를 가지지만 특별한 경우를 제외하고는 그 특성이 동일하게 유지되지 않는다. 따라서 이산시간모형에 이산시간 지수선행과정의 특성을 반영할 필요가 있다. Darolles et al.(2006)과 Gouriéroux and Jasiak(2006), Duffie et al.(2003)은 연속시간 지수선행모형의 확률적 특성을 극한과정으로 수용하는 이산시간 지수선행과정을 제시하고 있다. 일반적으로 연속시간모형을 이산시간모형으로 이산화 할 수 있기 때문에, 이산화된 확률과정은 이산시간 지수선행 과정에 포함된다. 그러나 모든 이산시간 확률과정의 극한이 연속시간모형이 가지는 동일한 확률적 특성을 충족하지는 않는다¹³⁾. 그렇지만 상태변수의

13) 이러한 특성을 가장 극명하게 보이는 확률과정의 예가 CIR과정이다. 연속시간 CIR 확률과정은 Feller조건 하에서 항상 양의 값을 가지지만 이를 오일러 이산화한 확률과정은 Feller조건이 만족되더라도 그 극한과정이 양의 확률로 음의 값을 가질 수 있다. 그러나 이산시간에서 정의되는 Car 과정인 autoregressive gamma 과정은 이러한 이산화 문제를 발생시키지 않으며 그 극한과정은 연속시간 확률

확률과정이 Car 과정을 따를 경우 연속시간모형이 가지는 확률적인 특성을 모두 충족시키므로 Car 과정으로 정의되는 이산시간 지수선행과정은 이산화에 따른 문제를 해결한다. 이러한 Car 과정을 이용한 이산시간모형을 ‘정확한 이산시간모형’이라고 한다. 정확한 이산시간모형은 모형설정의 장점이외에도, Q 측도 하의 상태변수 확률과정이 이산시간 지수선행과정인 경우 거의 모든 자산가격의 해석해(analytical solution) 뿐만 아니라 해석적인 전이확률밀도함수를 얻을 수 있으므로 모든 경우에 최우추정(MLE)이 가능해진다. 최근의 여러 연구에서 이러한 이산시간 지수선행과정(Car process)을 이용한 분석이 다양하게 이루어지고 있다. 본 절에서는 이산시간 지수선행과정을 이해하는 데 필요한 기본적인 개념과 특성을 먼저 살펴본 후 이들을 이용한 정확한 이산시간모형 대해서 자세히 살펴본다.

제 1절 이산시간 지수선행과정의 주요 개념

1. 라플라스변환(Laplace transform)

이자율 기간구조모형을 포함하는 일반적인 자산가격 결정이론에서는 투자자가 이용 가능한 경제상황에 대한 정보를 나타내는 상태변수를 가정한다. 이러한 상태변수는 시장에서 거래되는 자산에 대한 수익률, 인플레이션율, 경제성장률과 같이 관측가능 한 것도 있지만 관측불가능 한 것도 있다. t 시점에서 투자자가 이용가능한 K 차원 상태변수 $X_t = \{x_t, x_{t-1}, \dots, x_0\}$ 가 생성하는 정보집합인 σ -필드(sigma-field)를 $\sigma(X_t)$ 로 나타내기로 한다. 시간의 흐름에 따른 상태변수의 움직임은 상태변수의 전이확률밀도함수(transition probability density function) 즉, 조건부확률밀도함수(conditional probability density function)로 나타낼 수 있다.

과정이 충족하는 확률적인 특성을 모두 충족시킨다.

$$f(x_{t+1} | X_t) \quad (4-1)$$

이러한 상태변수의 조건부확률밀도함수는 P 측도와 Q 측도 모두에서 정의될 수 있다. 시간의 흐름에 따른 상태변수의 움직임은 조건부확률밀도함수로 정의할 수 있지만 조건부확률밀도함수와 동일한 정보를 나타내는 조건부라플라스변환(conditional Laplace transform, LT)으로도 정의할 수도 있다.

$$\phi_t(u | X_t) = E[\exp(u' x_t) | X_t] \quad (4-2)$$

여기서 u 는 K 차원의 벡터를 나타낸다. (조건부)확률밀도함수와 동일한 정보를 나타내는 (조건부)라플라스변환은 적률생성함수(moment generating function, MGF)라고도 불린다. 이 함수가 나타내는 상태변수에 대한 정보는 식 (4-2)에 자연대수를 취한 아래의 조건부로그라플라스변환(conditional log-Laplace transform)으로 나타낼 수도 있다.

$$\psi_t(u | X_t) = \log[\phi_t(u | X_t)] \quad (4-3)$$

이렇게 정의되는 함수를 누적적률생성함수 또는 간단히 누율생성함수(cumulant generating function)라고 한다. 식 (4-1)~식 (4-3)은 모두 특정 확률측도 하에서 상태변수에 대한 동일한 정보를 나타낸다. 라플라스변환 $\phi_t(u | X_t)$ 이나 로그라플라스변환 $\psi_t(u | X_t)$ 은 상태변수에 대한 이산시간 지수선형과정을 이용한 이산시간 자산가격 결정이론에서 일반적으로 이용된다.

2. 지수선형 확률할인요인함수

자산가격결정 이론에서 핵심적인 역할을 하는 것은 SDF이다. Harrison and Kreps(1979)와 Harrison and Pliska(1981)의 무차익거래와 완전시장의

가정 그리고 Richard and Hansen(1987)의 ① 자산가격의 존재와 유일성, ② 가격의 선형성과 연속성, ③ 무차익거래 가정 하에 양(positive)의 SDF가 존재함은 잘 알려진 사실이다. 이산시간 지수선형과정을 이용한 자산가격결정에서는 이러한 SDF가 상태변수에 대한 지수선형함수(exponential affine function)로 설정된다.

$$M_{t+1} = \exp[\alpha_t(X_t)'x_{t+1} + \beta_t(X_t)] \quad (4-4)$$

여기에서 K 차원벡터 $\alpha_t(X_t)$ 와 스칼라 $\beta_t(X_t)$ 는 상태변수(X_t)의 t 시점까지의 확정함수(deterministic function)이다. 그리고 일반적으로 $\alpha_t(X_t)$ 를 요인적재벡터(factor loading vector) 또는 위험민감도벡터(risk sensitivity vector)라고 하고, 이자율 기간구조모형에서 위험의 시장가격으로 해석할 수 있다. $E_t[M_{t+1}] = \exp(-r_{t+1}^f) = \exp[\psi_t(\alpha_t(X_t)|X_t) + \beta_t(X_t)]$ 이므로¹⁴⁾ 식 (4-4)의 지수선형 SDF는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$M_{t+1} = \exp[\alpha_t(X_t)'x_{t+1} - r_{t+1}^f - \psi_t(\alpha_t(X_t)|X_t)] \quad (4-5)$$

식 (4-5)의 형태로 SDF가 정의되면, 이는 무차익거래 제약을 충족하는 SDF가 된다. Gouriéroux and Monfort(2007)은 식 (4-5)와 같이 무차익거래 제약을 충족하는 지수선형 SDF를 채권과 파생상품을 포함한 다양한 자산가격결정에 활용할 수 있고, 이를 통해 P 측도와 Q 측도 하의 상태변수 동태방정식을 자유롭게 설정할 수 있음을 보여준다¹⁵⁾. 이와 관련

14) 여기에서 r_{t+1}^f 는 t 시점과 $t+1$ 시점 사이의 기간 동안에 적용되는 무위험 단기이자율을 나타내는 것으로 t 시점에 미리 결정된(predetermined) 것이다. 이전까지의 논의에서는 이를 r_t 라고 표기하였으나 이후 논의에서는 이산시간 지수선형과정에 대한 기존연구와의 일관성을 위해서 r_{t+1}^f 로 표기하기로 한다.

15) 지수선형 SDF와 라플라스변환을 이용한 이산시간 자산가격결정 이론과 관련된 논의는 Bertholon et al.(2006), Darolles et al.(2006), Gouriéroux et al.(2004), Gouriéroux et al.(2003, 2006), Pegoraro(2006), Monfort and Pegoraro(2006, 2007) 등을 참고할 수 있다.

된 논의는 다음 절에서 살펴보기로 한다.

연속시간 상사 이산시간 이자율 기간구조모형에서 보듯이 식 (4-4)와 같이 SDF를 상태변수의 지수선형함수로 설정하는 것이 특별한 것은 아니다. 불확실성하의 일반균형모형에서, 지수선형 SDF는 투자자 동태최적화의 1계 조건인 오일러방정식으로부터 유도되는 소비기반 자산가격 결정모형(Consumption based CAPM, C-CAPM)에서 설정되는 대부분의 SDF를 포함한다. C-CAPM에서 CRRA효용함수(constant relative risk aversion utility function)를 가정하는 경우 명목 SDF(nominal SDF)는 상태변수의 지수선형함수로 쓸 수 있다.

$$M_{t,t+1} = \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\gamma \frac{Q_t}{Q_{t+1}} = \exp \left[\log \delta + \gamma \log \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) - \log \left(\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \right) \right] \quad (4-6)$$

여기에서 δ 는 주관적 할인요인(subjective discount factor), γ 는 상대적 위험기피도(relative risk aversion), C_t 와 Q_t 는 t 시점의 실질소비와 물가수준을 나타낸다. 식 (4-6)의 지수선형 SDF에서는 관측가능한 경제변수인 소비증가율($\log(C_{t+1}/C_t)$)과 인플레이션율($\log(Q_{t+1}/Q_t)$)이 상태변수가 된다. 그리고 주식수익률이나 무위험이자율 이례현상(puzzle)을 설명하기 위해 Weil(1989)과 Epstein and Zin(1991)에서 제시된 추차적인 효용함수(recursive utility function)를 가정하고 콥-더글라스형태의 합산함수(aggregator of Cobb-Douglas form)를 가정하는 경우에도, 다음의 지수선형 SDF를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= \delta^\theta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\theta/\psi} \left(\frac{W_t}{W_{t+1}} \right)^{1-\theta} \left(\frac{Q_t}{Q_{t+1}} \right)^\theta \\ &= \exp \left[\theta \log \delta - \frac{\theta}{\psi} \log \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) + (\theta - 1) \log \left(\frac{W_{t+1}}{W_t} \right) - \theta \log \left(\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \right) \right] \end{aligned} \quad (4-7)$$

여기에서 δ 는 주관적인 할인요인, ψ 는 소비의 시점간대체탄력성 (elasticity of intertemporal substitution), $\theta = \frac{1-\gamma}{1-1/\psi}$, γ 는 상대적위험기피도이다. 식 (4-7)은 경제 전반적인 부의 증가를 나타내는 시장포트폴리오의 수익률($\log(W_{t+1}/W_t)$)이 하나의 상태변수로 추가된 점이 식 (4-6)과 다르다. Bansal and Yaron(2004)은 이러한 지수선형 SDF를 이용하여 금융시장에서 관측되는 주식 프리미엄에 관한 의문현상(puzzle 이레현상)을 일반균형이론의 관점에서 설명하고자 하였으며, Eraker(2008)는 일반균형 선형자산가격모형을 제시하였다. 이레현상을 설명하기 위하여 Campbell and Cochrane(1999)이 제시한 외부소비습관(external habit) 모형에서도 지수선형 SDF를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 M_{t+1} &= \delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \frac{Q_t}{Q_{t+1}} \\
 &= \exp \left[\log \delta - \gamma \log \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right) - \gamma \log \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) - \log \left(\frac{Q_{t+1}}{Q_t} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4-8}$$

여기에서 δ 는 주관적할인요인, γ 는 상대적위험기피도, $S_t = (C_t - H_t)/C_t$ 이고 H_t 는 외생적인 습관적 소비수준이다. Le et al.(2010)은 식 (4-7)과 식 (4-8)의 지수선형 SDF를 포괄하는 일반적인 지수선형 SDF를 가정하고 이산시간 이자율 기간구조모형을 유도하였다. 그러나 이러한 이산시간 이자율 기간구조모형을 포함하는 일반균형모형을 정의하고 이에 대한 캘리브레이션(calibration)과 최우추정을 한 결과 식 (4-7) 또는 식 (4-8)과 같은 SDF가 이레현상을 설명하기에 충분하지 않다는 분석결과를 제시하였다.

3. 이산시간 지수선형과정의 측도변환

자산가격 결정이론에서 일반적으로 P 측도 하에 설정된 상태변수의 조건부확률밀도함수는 Radon-Nikodym derivative(d_t^Q)를 이용하여 Q 측도 하의 조건부확률밀도함수로 변환될 수 있다.

$$d_t^Q(x_{t+1}|X_t) = \frac{M_{t+1}(X_{t+1})}{E_t[M_{t+1}(X_{t+1})]} = \exp(r_{t+1})M_{t+1}(X_{t+1}) \quad (4-9)$$

d_t^Q 를 이용하면 P 측도 하의 상태변수 조건부확률밀도함수인 $f^P(x_t|X_t)$ 를 Q 측도 하의 조건부확률밀도함수로 변환할 수 있다.

$$f^Q(x_{t+1}|X_t) = f^P(x_{t+1}|X_t)d_t^Q(x_{t+1}|X_t) \quad (4-10)$$

또한, 이러한 관계로부터 Q 측도 하의 상태변수 조건부확률밀도함수를 P 측도 하의 조건부확률밀도함수로 측도변환하기 위한 Radon-Nikodym derivative(d_t^P)는 다음과 같다.

$$d_t^P(x_{t+1}|X_t) = \frac{1}{d_t^Q(x_{t+1}|X_t)} \quad (4-11)$$

$M_{t+1}(X_{t+1})$ 이 식 (4-4)와 같이 상태변수의 지수선형함수로 설정되면 식 (4-9)의 측도변환을 위한 Radon-Nikodym derivative(d_t^Q)는 라플라스 변환을 이용하여 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} d_t^Q(x_{t+1}|X_t) &= \frac{\exp(\alpha_t(X_t)'x_{t+1} + \beta_t(X_t))}{E_t[\exp(\alpha_t(X_t)'x_{t+1} + \beta_t(X_t))]} \\ &= \exp[\alpha_t(X_t)'x_{t+1} - \psi_t(\alpha_t(X_t))] \end{aligned} \quad (4-12)$$

식 (4-12)는 식 (4-4)와 같이 상태변수의 지수선형함수로 SDF를 설정하면 Q 측도로 측도변환을 위한 Radon-Nikodym derivative(d_t^Q) 또한 상태변수의 지수선형함수가 됨을 나타낸다. Gouriéroux and Monfort(2007)는 $\alpha(X_t)$ 가 무차익거래 제약을 충족할 때 Q 측도 하의 조건부라플라스변환 $\phi_t^Q(u|X_t)$ 과 P 측도 하의 조건부라플라스변환 $\phi_t^P(u|X_t)$ 는 다음의 관계를 충족함을 보였다.

$$\phi_t^Q(u|X_t) = \frac{\phi_t^P(u + \alpha_t|X_t)}{\phi_t^P(\alpha_t|X_t)} \quad \Leftrightarrow \quad \psi_t^Q(u|X_t) = \psi_t^P(u + \alpha_t|X_t) - \psi_t^P(\alpha_t|X_t) \quad (4-13)$$

식 (4-13)은 라플라스변환을 이용하여 간단하게 P 측도 하의 상태변수 동태방정식을 Q 측도 하의 동태방정식으로 변환할 수 있음을 보여준다. 이자율 기간구조모형을 포함하는 자산가격 결정이론에서 기본적으로 무차익거래(absence of arbitrage opportunity)를 가정하므로 식 (4-13)의 P 측도와 Q 측도 하에 라플라스변환의 관계들을 이용하여 간단하게 Q 측도 하의 상태변수 동태방정식을 얻을 수 있다.(이후에서 표기의 편의를 위하여 혼란의 여지가 없는 한 $\phi_t(u|X_t)$, $\psi_t(u|X_t)$, $\alpha_t(X_t)$, $\beta_t(X_t)$ 를 간단하게 각각 $\phi_t(u)$, $\psi_t(u)$, α_t , β_t 로 표기하기로 한다). 식 (4-13)에서 $u = -\alpha_t$ 이면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\psi_t^Q(-\alpha_t) = -\psi_t^P(\alpha_t) \quad (4-14)$$

그리고 식 (4-13)에서 u 를 $u - \alpha_t$ 로 대체한 다음, 식 (4-14)을 이용하여 정리하면 다음과 같이 상태변수의 동태방정식을 Q 측도에서 P 측도로 변환할 수 있는 라플라스변환들 사이의 관계를 얻을 수 있다.

$$\phi_t^P(u) = \frac{\phi_t^Q(u - \alpha_t | X_t)}{\phi_t^Q(-\alpha_t | X_t)} \Leftrightarrow \psi_t^P(u | X_t) = \psi_t^Q(u - \alpha_t | X_t) - \psi_t^Q(-\alpha_t | X_t) \quad (4-15)$$

또한, 식 (4-11), 식 (4-12) 그리고 식 (4-14)을 이용하면 Q 측도를 P 측도로 변환하는 Radon-Nikodym derivative $d_t^P(x_{t+1} | X_t)$ 역시 상태변수의 지수 선형함수로 나타낼 수 있다.

$$d_t^P(x_{t+1} | X_t) = \exp \left[-\alpha_t' x_{t+1} - \psi_t^Q(-\alpha_t) \right] \quad (4-16)$$

4. Car 과정: 이산시간 지수선형과정

[정의] Car(1) 과정(Compound Autoregressive process of order 1)

: discrete time exponential affine process

n 차원의 벡터 y_t 의 조건부라플라스변환 $\phi_t(u | Y_t) = E[\exp(u' y_{t+1}) | Y_t]$

이 다음과 같이 y_t 의 지수선형함수이면 y_t 는 Car(1) 과정이라 한다.

$$\phi_t(u | Y_t) = \exp \left[a_t(u)' y_t + b_t(u) \right] \quad (4-17)$$

여기에서 $Y_t = \{y_t, y_{t-1}, \dots, y_0\} \in \sigma(X_t)$ 이며, $a_t(u)$ 와 $b_t(u)$ 는 t 에 의존할 수 있는 t 시점까지 정보집합의 확정함수(deterministic function)이다.

여기서는 자산가격 결정이론에 이용될 수 있는 이산시간 지수선형과정에 대해 간략하게 살펴보고자 한다¹⁶⁾. 논의에서 확률과정 y_t 는 t 시점까지 이용가능한 정보집합인 시그마필드 $\sigma(X_t)$ 의 함수 또는 원소이다.

식 (4-17)과 같이 조건부라플라스변환이 y_t 의 지수선형함수이면 조건부누울생성함수는 y_t 의 선형함수이다. 따라서 Car(1) 과정은 y_t 의 조건부평균과 조건부분산행렬이 y_t 의 선형함수인 확률과정을 의미한다. 이산시간 자산가격결정 모형에 이용되는 이산시간 지수선형과정은 이러한 특성을 가지는 Car 과정이다. Car(1)은 보다 일반적인 Car(p) 과정으로 확장될 수 있다. 또한, Car 과정은 이산시간 연속상태공간에서 정의되는 확률과정뿐만 아니라 이산시간 이산상태공간에서 정의되는 다양한 확률과정을 포함한다. Gouriéroux et al.(2002)는 이산시간모형에서 채권가격이 상태변수의 지수선형함수가 되기 위한 조건을 다음과 같이 제시하였다. 이는 Duffie and Kan(1996)의 연속시간모형 선형조건에 해당하는 것이라 할 수 있다.

- Q 측도 하에서 상태변수의 확률과정은 Car(1)과정이다.
- 단기이자율 r_t 는 상태변수벡터 X_t 의 선형함수이다.

본 절에서는 Gouriéroux et al.(2002)에서 이산시간 이자율 기간구조모형을 위한 조건들 중에 핵심이 되는 Car확률과정에 포함되는 주요 확률과정들을 살펴보기로 한다.

(1) 정규분포 AR(1) 과정

y_t 가 정규분포를 따르는 AR(1) 과정(autoregressive process of order

16) 이산시간 지수선형과정에 대한 보다 자세한 논의는 Darolles et al.(2006), Gouriéroux and Jasiak(2006), Gouriéroux. et al(2006), Bertholon et al.(2008) 등을 참조할 수 있다.

1)일 때 그 동태방정식은 다음과 같다.

$$y_{t+1} = \mu + \rho y_t + \epsilon_{t+1} \quad , \quad \epsilon_{t+1} \sim i.i.d N(0, \sigma^2) \quad (4-18)$$

식 (4-18)의 조건부라플라스변환은 $a_t(u) = u \rho$, $b_t(u) = u \mu + \frac{1}{2} u^2 \sigma^2$ 이므로 y_t 는 Car(1) 과정이다. 정규분포 AR(1) 과정은 연속시간 Vasicek모형에 해당하는 정확한 이산시간모형이다. 정규분포를 따르는 AR(1) 과정의 성질은 다변량정규분포를 따르는 VAR(1) 과정으로 확장하여도 성립한다. 즉, 정규분포 VAR(1) 과정(이하 NVAR(1))은 Car(1) 과정이다.

(2) ARG(1) 과정

ARG(1)(autoregressive gamma process of order one)은 연속시간 CIR 과정에 정확히 상응하는 과정이다. 앞서 살펴본 바와 같이 CIR모형을 이산화한 모형은 연속시간모형과 형태가 동일한 조건부이분산성을 가지는 정규분포를 따른다. 그러나 Feller조건을 충족하더라도 양의 확률로 음의 값을 가질 수 있다. 반면에 ARG(1) 과정은 다음의 식과 같은 포아송혼합감마분포(mixture Gamma distribution with Poisson weights)를 따르므로 연속시간 CIR 확률과정과 같이 일정한 제약을 가하는 경우 항상 양의 값을 가지게 된다.

$$\begin{cases} \frac{y_{t+1}}{\mu} | z_{t+1} \sim G(\nu + z_{t+1}), & \nu > 0 \\ z_{t+1} | y_t \sim Poisson(\rho y_t / \mu), & \rho > 0, \mu > 0 \end{cases} \quad (4-19)$$

여기에서 $G(\cdot)$ 는 자유도가 $\nu + z_{t+1}$ 이고 스케일파라미터가 1인 감마분포, $Poisson(\cdot)$ 는 자유도가 $\rho y_t / \mu$ 인 포아송분포를 나타낸다. 식 (4-19)

의 ARG(1) 과정에서 μ 는 스케일파라미터, ν 는 자유도, ρ 는 자기상관계수이다. 포아송혼합감마분포의 ARG(1) 과정을 따르는 y_{t+1} 의 조건부확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(y_{t+1}|y_t; \mu, \nu, \rho) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{\rho y_t}{\mu}\right)^k}{k!} \exp\left(-\frac{\rho y_t}{\mu}\right) \times \frac{\left(\frac{y_{t+1}}{\mu}\right)^{\nu+k-1} \exp\left(-\frac{y_{t+1}}{\mu}\right)}{\Gamma(\nu+k)} \right] \quad (4-20)$$

여기에서 $\Gamma(\cdot)$ 는 감마함수이다. 그리고 y_{t+1} 의 조건부라플라스변환은 다음과 같다.¹⁷⁾

$$\phi_t(u|Y_t) = \exp \left[-\nu \log(1 - u\mu) + \frac{\rho u}{1 - u\mu} y_{t+1} \right] \quad (4-21)$$

여기서 $u < 1/\mu$ 이다. 식 (4-21)에서 $a(u) = \frac{\rho u}{1 - u\mu}$, $b(u) = -\nu \log(1 - u\mu)$ 이므로 ARG(1)과정은 Car(1) 과정임을 알 수 있다. 이러한 성질을 가지는 y_{t+1} 의 동태방정식은 다음과 같다.

$$y_{t+1} = \nu\mu + \rho y_t + \eta_{t+1} \quad (4-22)$$

여기서 η_{t+1} 은 마팅게일 차분수열(martingale difference sequence)이다. 식 (4-22)에서 y_t 는 항상 양의 값을 갖는 약AR(1) 과정(positive weak AR(1))이며 아래와 같은 조건부평균과 조건부분산을 가진다.

$$E[y_{t+1}|y_t] = \nu\mu + \rho y_t, \quad Var[y_{t+1}|y_t] = \nu\mu^2 + 2\rho\mu y_t \quad (4-23)$$

17) ARG 과정의 성질에 대한 보다 자세한 논의는 Gouriéroux and Jasiak(2006)을 참조할 수 있다.

이러한 성질을 가지는 ARG(1) 과정은 VARG(1) 과정(vector ARG(1))으로 확장되더라도 오차항들의 조건부분산이 대각행렬, 즉 조건부독립이면 Car(1) 과정이 된다. 그리고 식 (4-21)과 같은 닫힌 형태(closed form)의 우도함수(likelihood function)를 얻을 수 있다. 연속시간 다요인 CIR모형의 경우 형태적으로는 이분산성을 가지는 조건부정규분포를 따르지만 각 요인들이 서로 독립인 경우를 제외하고는 닫힌 형태의 우도함수를 얻을 수 없다. 그러나 ARG(1) 과정은 닫힌 형태의 우도함수를 얻을 수 있으므로 이를 이용하여 정확하고 효율적인 추정이 가능해진다. 또한, 이산화한 CIR모형의 경우 상태변수가 양의 확률로 음의 값을 가질 수 있는 것에 반해, 식 (4-19)의 경우 항상 양의 값을 가지므로 연속시간의 표준형태인 Dai and Singleton(2000)의 $A_m(N)$ 범주에 상응하는 정확한 이산시간 모형을 가능하게 한다. Le et al.(2010)은 식 (4-18)과 식 (4-19)을 이용하여 Dai and Singleton(2000)에서 $A_m(N)$ 으로 분류되는 표준형태의 연속시간 이자율 기간구조모형에 상응하는 표준형태의 이산시간 이자율 기간구조모형을 제시하고 있다. 이와 관련된 논의는 본 절 2장에서 다시 살펴보기로 한다.

(3) 시간동질적인 이산상태 마르코프체인

상태변수 y_{t+1} 가 각 시점마다 $e_j \in R^J, j \in \{1, \dots, J\}$ 인 J 차원의 벡터값을 가지는 동질적인 J 상태 마르코프체인(homogeneous J -state Markov chain)을 따르면, y_{t+1} 의 전이확률(transition probability)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\pi(e_i, e_j) = \Pr[y_{t+1} = e_j | y_t = e_i] \quad (4-24)$$

여기에서 e_i 와 e_j 는 $(J \times J)$ 행등행렬의 i 와 j 열을 나타낸다. y_{t+1} 가 동질적인 마르코프체인을 따르므로 식 (4-24)의 전이확률은 항상 일정한 상

수이다. 이러한 상태변수 y_{t+1} 의 조건부라플라스변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_t(u|Y_t) \\ = \exp \left[\left\{ \log \left(\sum_{j=1}^J \exp(u'e_j) \pi(e_1, e_j) \right), \dots, \log \left(\sum_{j=1}^J \exp(u'e_j) \pi(e_J, e_j) \right) \right\}' y_t \right] \end{aligned} \quad (4-25)$$

여기서 $a_t(u) = \left[\log \left(\sum_{j=1}^J \exp(u'e_j) \pi(e_1, e_j) \right), \dots, \log \left(\sum_{j=1}^J \exp(u'e_j) \pi(e_J, e_j) \right) \right]'$ 이고 $b_t(u) = 0$ 이므로 y_{t+1} 은 Car(1)과정이다. 이러한 y_{t+1} 을 이용하여 이산시간 국면전환 자산가격모형을 설정할 수 있다. Dai et al.(2007)은 Q 측도 하의 상태변수가 정규분포를 따르는 VAR(1)과정인 이산시간 국면전환 이자율 기간구조모형을 제시하였으며, Monfort and Pegoraro(2007)는 P 측도 하의 상태변수가 정규분포를 따르는 VARMA(p, q)과정인 이산시간 국면전환 모형을 제시하였다.

(4) 위샤프 자기상관 과정

위샤프 자기상관 과정(Wishart autoregressive process of order 1, WAR(1))¹⁸⁾은 대칭양정부호행렬과정(symmetric positive definite matrix process)이므로 조건부공분산행렬이나 효용함수의 2계도함수로부터 얻어지는 다변량 위험기피도를 설명하기 위하여 일반적으로 이용될 수 있다¹⁹⁾. y_{t+1} 가 P 측도에서 정의된 $(n \times n)$ WAR(1)과정이면, y_{t+1} 의 로그라플라스변환변환은 다음과 같다²⁰⁾.

18) WAR과정에 대한 자세한 논의는 Gouriou and Sufana(2003)와 그 참고문헌을 참고할 수 있다.

19) Gouriou and Sufana(2010)은 연속시간 WAR과정으로 기초자산가격이 다변량 확률변동성(multivariate stochastic volatility)을 가지는 확률변동성모형과 이를 이용한 파생상품 가격결정을 제시하였다.

20) WAR(1)과정의 조건부확률확률밀도함수는 비심위샤프분포(noncentered Wishart

$$\psi_t(\Gamma) = \log[E_t \{ \exp(Tr \Gamma y_{t+1}) \}] \quad (4-26)$$

$$= Tr [M' \Gamma (I_n - 2\Sigma \Gamma)^{-1} M y_t] - \frac{K}{2} \log \det [(I_n - 2\Sigma \Gamma)]$$

여기서 Γ 는 $(n \times n)$ 행렬, K 는 자유도이다. 그리고 M 은 y_{t+1} 을 구성하는 K 개의 n 차원 정규분포 VAR(1) 과정의 공통계수행렬(common autoregressive coefficient matrix)이고 Σ 는 공통조건부공분산행렬이며, M 과 Σ 는 $(n \times n)$ 행렬이다. M 과 Σ 의 의미는 y_{t+1} 의 동태방정식인 아래의 식 (4-27)을 통해 좀 더 명확히 알 수 있다. 로그라플라스변환이 식 (4-26)과 같은 y_{t+1} 의 확률과정을 $WAR_n(K, M, \Sigma)$ 로 나타내기로 한다. 식 (4-26)에서 $Tr(\Gamma y_{t+1}) = \sum_{ij} \Gamma_{ij} y_{ij,t+1} = \sum_{i \leq j} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) y_{ij,t+1}$ 인 것을 고려하면 로그라플라스변환이 상태변수의 선형함수이므로 WAR과정을 따르는 $(n \times n)$ 행렬인 y_{t+1} 가 Car(1) 과정임을 알 수 있다.

위샤트확률과정은 연속시간에서도 정의될 수 있다. 연속시간 위샤트확률과정은 연속시간 CIR 과정을 다변량으로 확장한 것이며²¹⁾ 이를 이산화하면 이산시간 위샤트확률과정에 포함된다. 그러나 이산화한 위샤트확률과정의 극한과정이 연속시간 위샤트확률과정으로 반드시 수렴하지 않으므로 이산시간 과정이 연속시간 과정보다 보다 포괄적이라 할 수 있다.

로그라플라스변환이 식 (4-26)과 같은 $WAR_n(K, M, \Sigma)$ 과정은 K 가

distribution)의 확률밀도함수이며 다음과 같다.

$$f(y_{t+1}|y_t) = \frac{1}{2^{Kn/2}} \frac{1}{\Gamma_n(K/2)} |\Sigma|^{-K/2} |I_n - \frac{1}{2} \Sigma^{-1} M y_t M' \Sigma^{-1} y_t|^{-K/2} \\ \times |y_{t+1}|^{(K-n-1)/2} \exp \left[-\frac{1}{2} Tr[\Sigma^{-1}(y_{t+1} + M y_t M')] \right]$$

여기서 $|\cdot|$ 은 행렬식 (determinant)을 나타내며, $Tr[\cdot]$ 는 트레이스연산자(trace operator)를 나타낸다. 그리고 $\Gamma_n(K/2) = \int_{A \gg 0} \exp[Tr[(-A)]] |A|^{\frac{(K-n-1)}{2}} dA$ 는 다차원감마함수(multi-dimensional Gamma function)이다.

21) 연속시간 WAR 과정의 특성과 관련한 자세한 논의는 Grourieroux(2006)를 참조할 수 있다.

$K > n$ 인 정수인 경우 다음과 같은 동태방정식을 따른다.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{t+1} = M y_t M' + K \Sigma + \eta_{t+1} \\ y_t = \sum_{k=1}^K x_{k,t} x_{k,t}' \\ x_{k,t+1} = M x_{k,t} + \epsilon_{k,t+1}, \quad k \in \{1, \dots, K\} \\ \epsilon_{k,t+1} \overset{p}{\sim} N(0, \Sigma), \quad k \in \{1, \dots, K\} \end{array} \right. \quad (4-27)$$

여기에서 η_{t+1} 은 $(n \times n)$ 차의 마팅게일차분 행렬이며, 각각의 $\epsilon_{k,t+1}$ 들은 서로 독립이다. $WAR_n(K, M, \Sigma)$ 과정은 ARG(1) 과정을 다변량으로 확장한 것이므로 $n=1$, $\Gamma=u$, $M=m$, $\Sigma=\sigma^2$ 이라고 하면, 로그라플라스변환이 $\psi_t^P(u) = \left[\frac{m^2 u}{1-2\sigma^2 u} y_t - \frac{k}{2} \log(1-2\sigma^2 u) \right]$ 이므로 $\rho=m^2$, $\nu=k/2$, $\mu=2\sigma^2$ 인 ARG(1) 과정의 로그라플라스변환과 같아진다. Gouriéroux and Sufana(2003)는 이러한 특성을 가지는 WAR(1) 과정을 이용하여 이산시간 QTSM을 제시하였으며, Gouriéroux et al.(2009)은 이를 이용한 다변량 확률변동성모형을 제시하였다. WAR과정에 대한 보다 자세한 논의는 이들을 참조할 수 있다.

이상에서 살펴본 정규분포 AR(1)과 ARG(1), 시간동질적인 마르코프체인, WAR(1) 과정은 정확한 이산시간모형에서 가장 많이 이용되는 확률과정이다. Q 측도 하에서 상태변수들이 이러한 확률과정을 따르는 것으로 가정하는 경우 P 측도 하의 확률과정이 현실에서 관측되는 기간구조의 특징들을 보다 쉽게 설명할 수 있을 뿐만 아니라 실증연구에서 모형에 대한 추정 또한 편리해진다. 이와 관련한 논의는 이후에 다시 하기로 한다.

5. Car(1) 과정의 확장

Bertholon et al.(2008)은 현실에서 관측되는 자산가격과 그 특성들을 보다 잘 설명하기 위해 Car(1) 과정들을 확장하여 일반화 한 ECar(1)과정(extended Car(1) process)의 개념을 제시하였으며 그 정의는 다음과 같다.

[정의] ECar(1)과정(Bertholon et al.(2008))

확률과정 $y_{2,t}$ 가 존재하고 $y_{2,t}$ 를 다른 확률과정 $y_{1,t}$ 와 결합한 확률과정 $y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ 가 Car(1)과정이면 확률과정 y_{1t} 를 ECar(1) 과정이라고 한다. 그리고 확률과정 $y_{1,t}$ 에 의해서 생성된(spanned) 시그마필드를 $\sigma(y_{1t})$ 라 하고, 이와 결합된 확률과정 y_t 에 의해서 생성된 시그마필드를 $\sigma(y_t)$ 라 할 때, $\sigma(y_{1,t}) = \sigma(y_t)$ 이면 확률과정 $y_{1,t}$ 를 ‘internally extended Car(1) 과정’이라고 하며, $\sigma(y_{1,t}) \subset \sigma(y_t)$ 이면 확률과정 $y_{1,t}$ 를 ‘externally extended Car(1) 과정’이라고 한다.

ECar(1)과정은 n 차원의 상태변수 y_{t+1} 의 동태방정식이 임의의 p 기까지의 과거에 의존하는 Car(p)과정(compound autoregressive process of order p)을 포함한다. Car(p)과정의 라플라스변환은 다음과 같다²²⁾.

$$E[\exp(u' y_{t+1}) | Y_t] = \exp[a_1(u)' y_t + \dots + a_p(u)' y_{t+1-p} + b(u)] \quad (4-28)$$

여기서 $Y_t = \{y_t, y_{t-1}, \dots, y_0\}$ 이며, $a_i(u), i \in \{1, \dots, p\}$ 와 $b(u)$ 는 t 시점까지 정보집합의 확정함수이며, $a_p(u) \neq 0, \forall u \in R^n$ 이다. 앞서 살펴본 NVAR(1)과 VARG(1) 과정을 NVAR(p)와 VARG(p)로 확장하는 경우

22) Car(p) 과정에 대한 자세한 논의는 Darolles et al.(2006)을 참조할 수 있다.

라플라스변환이 식 (4-28)과 같은 Car(p) 과정을 얻을 수 있다. 그런데 $y_t = (y_{1,t}, y_{2,t})'$, $y_{2,t} = (y_{1,t-1}', \dots, y_{1,t-p+1}')$ 이면, $\sigma(y_{1,t}) = \sigma(y_t)$ 이므로 NVAR(p)와 VARG(p) 과정은 $y_{1,t}$ 의 'internally extended Car(1) 과정'이다. 이러한 과정은 상태변수의 동태방정식이 VARMA(p, q)와 GARCH-형태의 조건부이분산성을 가지는 확률과정 등을 포함한다. 그리고 'externally extended Car(1) 과정'은 상태변수 동태방정식의 조건부 평균방정식이 VAR(p) 또는 VARG(p)로, 조건부분산방정식이 확률변동성모형인 SVM(stochastic volatility in mean) 과정과 조건부평균방정식이 국면전환을 포함하는 NVAR(p) 또는 VARG(p) 과정을 포함한다. 그러므로 정확한 이산시간모형에서 ECar(1) 과정을 통해 현실의 특성들을 충분히 반영할 수 있도록 상태변수의 동태방정식을 유연하게 설정할 수 있다²³⁾.

제 2 절 LSD의 이산시간 지수선형모형

Le, Singleton and Dai(2010, 이하 LSD)는 DK와 DS의 연속시간모형에 상응하는 정확한 이산시간모형을 제시하였다. DK와 DS의 모형을 이산화할 경우 변동성을 유발하는 상태변수가 서로 독립이 아니면 닫힌 형태의 상태변수 조건부전이확률밀도함수를 얻을 수 없으며 상태변수가 양의 확률로 음의 값을 가질 수 있다. LSD는 Car(1) 과정을 이용하여 이러한 문제점을 해결하려고 하였다. 또한, DS의 $A_M^Q(N)$ 을 극한과정으로 가지는 이산시간 지수선형모형의 표준형태 $DA_M^Q(N)$ 를 제시하였다. $DA_M^Q(N)$ 에서 N 은 연속시간모형에서와 같이 전체 상태변수의 수를, M ($0 \leq M \leq N$)은 변동성을 유발하는 상태변수의 수를 나타낸다.

연속시간모형을 이산화하는 경우 문제가 되는 것은 변동성을 유발하는 상태변수이다. LSD는 Q 측도 하에서 상태변수를 VARG(1) 과정으로 가

23) Bertholon et al.(2008)은 정확한 이산시간 자산가격결정 모형에 이용될 수 있는 ECar(1) 과정에 대한 논의와 다양한 예를 제시한다.

정함으로써 이산화 과정에서 발생하는 문제를 해결한다. LSD의 $DA_M^Q(N)$ 모형에서 N 차원의 전체 상태변수벡터 X_t 는 변동성을 유발하는 M 차원의 상태변수 Z_t , 나머지 $(N-M)$ 차원의 상태변수 Y_t 로 구성된다. 그리고 Q 측도 하에서 X_t 의 동태방정식은 $A_M(N)$ 에서와 유사하다.

$$X_{t+1} = X_t + (I - \Phi)(\Theta - X_t) + \Sigma \sqrt{S_t} \epsilon_{t+1} \quad (4-29)$$

여기서 $X_t = (Z_t', Y_t')'$ 이며, I 는 N 차원의 항등행렬, Φ 는 $(N \times N)$ 차원의 블록하삼각행렬(block lower triangular matrix), Θ 는 장기평균을 나타내는 N 차원 벡터, Σ 는 $(N \times N)$ 행렬, ϵ_{t+1} 은 마팅게일차분수열로 구성된 N 차원 벡터이다. 그리고 $\sqrt{S_t}$ 는 DS에서와 같이 다음의 원소를 대각원소로 하는 N 차원의 대각행렬이다.

$$\{\sqrt{S_t}\}_{ii} = \sqrt{\alpha_i + \beta_i' X_t}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4-30)$$

식 (4-29)와 (4-30)에서 상태변수의 조건부상관관계는 Σ 에 의해 결정된다. 그리고 Q 측도 하의 상태변수 동태방정식에서 DS의 식별제약과 유사한 다음과 같은 제약이 가해진다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \Phi_{M \times M}^{ZZ} & \mathbf{0}_{M \times (N-M)} \\ \Phi_{(N-M) \times M}^{XZ} & \Phi_{(N-M) \times (N-M)}^{XX} \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{M \times 1}^Z \\ \mathbf{0}_{(N-M) \times 1} \end{pmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} I_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N-M)} \\ \mathbf{0}_{(N-M) \times M} & \Sigma_{(N-M) \times (N-M)}^{XX} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{1}_{(N-M) \times 1} \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} I_{M \times M} & B_{m \times (N-M)}^{ZX} \\ \mathbf{0}_{(N-M) \times M} & \mathbf{0}_{(N-M) \times (N-M)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-31)$$

여기서 $B \equiv (\beta_1, \dots, \beta_N)$ 이며, 모든 상태변수들이 관측가능하지 않는 경우 $\Sigma^{XX} = I_M$ 이다. 식 (4-29)~식 (4-31)에 해당하는 $DA_M^Q(N)$ 모형의 상태변수 동태방정식은 M 차원의 VARG(1)과 $(N-M)$ 차원의 NVAR(1) 과정의 결합이다. 아래에서는 이러한 동태방정식에 부가해지는 제약에 대해 자세히 살펴보기로 한다.

먼저, $DA_M^Q(N)$ 의 표준형태에서 변동성요인을 가장 많이 포함하는 $DA_N^Q(N)$ 모형을 살펴보자. LSD는 N 개의 모든 상태변수가 변동성에 영향을 미치는 것으로 가정할 때, 즉 $X_t = Z_t$ 인 경우, 상태변수 Z_{t+1} 을 조건부독립인(conditionally independent) VARG(1) 과정으로 설정하였다. 이 때, 식 (4-31)의 Φ 는 다음의 제약을 충족하는 $(N \times N)$ 행렬이 된다.

$$\begin{cases} 0 < \phi_{ii} < 1 \\ \phi_{ij} \leq 0 \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (4-32)$$

여기서 ϕ_{ij} 는 Φ 의 (i, j) 원소를 나타낸다. 이와 함께 조건부독립인 VARG(1) 과정을 따르는 N 개의 상태변수 $Z_{i,t}$ 의 자유도파라미터 ν_i 와 스케일파라미터 c_i 는 각각 $\{\nu_i > 0, c_i > 0, i = 1, \dots, N\}$ 의 제약을 충족한다. 식 (4-32)를 충족하는 비특이행렬(nonsingular matrix) $\rho = (I - \Phi)$ 의 i 번째 행을 ρ_i 라 하면, VARG(1) 과정의 $Z_{i,t+1}$ 은 ARG(1) 과정으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \frac{Z_{i,t+1}}{c_i} | J_{i,t+1} \sim G(\nu_i + J_{i,t+1}) & , \quad \nu_i > 0 \\ J_{i,t+1} | Z_t \sim \text{Poisson}\left(\frac{\rho_i Z_t}{c_i}\right) & , \quad c_i > 0 \end{cases} \quad (4-33)$$

여기서 $G(\cdot)$ 는 자유도가 $\nu + z_{t+1}$ 이고 스케일파라미터가 1인 감마분포, $\text{Poisson}(\cdot)$ 는 자유도가 $\rho y_t / \mu$ 인 포아송분포, $J_{i,t+1} \in (0, 1, \dots)$ 는 포아송분포를 따르는 확률변수이다. N 개의 상태변수가 각각 조건부독립인

ARG(1) 과정이면 Z_{t+1} 은 식 (4-20)의 닫힌 형태의 우도함수를 가지며, N 개 상태변수의 조건부결합확률밀도함수로 $f^Q(Z_{t+1}|Z_t) = \prod_{i=1}^N f^Q(Z_{i,t+1}|Z_t)$ 를 얻을 수 있다. 또한 조건부라플라스변환은 각각의 상태변수가 ARG(1) 과정이므로 식 (4-17)의 일반적인 라플라스변환에 ARG(1) 과정의 라플라스 변환인 식 (4-21)을 적용하여 N 차원의 벡터함수 $a_t(u)$ 와 스칼라함수 $b_t(u)$ 를 얻을 수 있다.

$$a_t(u) = \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{1 - u_i c_i} \rho_i' \quad , \quad b_t(u) = - \sum_{i=1}^N \nu_i \log(1 - u_i c_i) a_t(u) \quad (4-34)$$

여기서 $u_i < 1/c_i$, $i = 1, \dots, N$ 이다. 식 (4-34)와 같이 라플라스변환이 상태변수의 지수선형함수이므로 Z_{t+1} 은 항상 비음의 조건을 충족하는 Car(1) 과정이다. 그리고 ρ 의 비대각원소들이 0이 아니라면 Z_{t+1} 은 서로 간에 상관관계를 가지므로 조건부독립 VARG(1)인 상태변수는 연속시간 모형에서 필요로 하는 성질을 모두 만족시킨다. 또한, 상관관계를 허용하는 연속시간 $A_N^Q(N)$ 모형에서는 해석적인 상태변수의 조건부확률밀도함수를 얻을 수 없는 것에 반해, $DA_N^Q(N)$ 모형에서 Z_t 는 닫힌 형태의 조건부확률밀도함수를 얻을 수 있다. 그리고 연속시간 $A_N^Q(N)$ 에서와 같이 상태변수들의 상관관계는 $\phi_{i,j} < 0$ 에 의해 항상 양의 상관관계를 가지게 된다. 여기서 Z_t 들이 항상 양의 상관관계를 가지게 되므로 조건부독립인 ARG(1) 과정에서 포아송분포의 자유도는 0보다 커야한다는 조건은 항상 충족된다. 이와 같은 $DA_N^Q(N)$ 는 시점사이의 간격이 짧아질수록 연속시간 $A_N^Q(N)$ 로 수렴한다.²⁴⁾

24) $DA_N^Q(N)$ 이 $A_N^Q(N)$ 으로 수렴하는 것은 다음에서 확인할 수 있다. $\rho = I - \kappa^Q \Delta t$ 이고, 조건부독립인 ARG(1) 과정인 $Z_{i,t+1}$ 의 스케일과 자유도파라미터를 각각 $c_i = \frac{\sigma_i^2}{2} \Delta t$, $\nu_i = \frac{2(\kappa^Q \theta^Q)_i}{\sigma_i^2}$ 로 나타내기로 한다. 여기서 $\Delta t \rightarrow 0$ 이면 아래와 같은 연속시간 확률과정으로 수렴한다.

다음으로, $0 < M < N$ 인 $DA_M^Q(N)$ 모형에서 M 차원의 상태변수 Z_t 는 독자적인 VARG(1) 과정을 따른다. 이는 식 (4-29)의 상태변수 동태방정식에서 Φ 를 식 (4-31)에서와 같이 블록하삼각행렬로 설정하는 것을 의미한다. 따라서 $DA_M^Q(N)$ 모형에서 VARG(1)과정에 가해진 제약이 $DA_M^Q(N)$ 모형에서는 M 차원의 Z_t 에만 적용된다. 그리고 Φ 가 블록하삼각행렬이므로 나머지 상태변수 Y_t 는 Z_t 가 주어졌다는 조건하에 조건부이분산성을 가지는 NVAR(1)과정이 된다. 따라서 Z_t 를 독자적인 확률과정으로 가정하면 전체 상태변수벡터 $X_t = (Z_t', Y_t')'$ 의 조건부결합확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f^Q(X_{t+1} | X_t) = f^Q(Y_{t+1} | Z_{t+1}, Y_t, Z_t) \times f^Q(Z_{t+1} | Z_t) \quad (4-35)$$

그리고 상태변수 $X_t = (Z_t', Y_t')'$ 의 조건부라플라스변환은 반복기대치의 법칙의 적용을 통해 상태변수 X_t 의 지수선형함수임을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} & E[\exp(u_z' Z_{t+1} + u_y' Y_{t+1}) | Z_t, Y_t] \\ &= E[E[\exp(u_y' Y_{t+1}) | Z_{t+1}, Z_t, Y_t] \exp(u_z' Z_{t+1}) | Z_t, Y_t] \\ &= E[\exp(a_y(u_y)' Y_t + b_y(u_y) + b_{yz}(u_y)' Z_{t+1}) \exp(u_z' Z_{t+1}) | Z_t, Y_t] \\ &= \exp[a_y(u_y)' Y_t + b_y(u_y) + a_z(u_z + b_{yz}(u_y))' Z_t + b_z(u_z + b_{yz}(u_y))] \end{aligned} \quad (4-36)$$

따라서 $DA_M^Q(N)$ 모형의 상태변수 $X_t = (Z_t', Y_t')'$ 는 Car(1) 과정이다.

$$dZ_t = \kappa^Q(\theta^Q - Z_t)dt + \Sigma \sqrt{\text{diag}(Z_t)} dW_t^Q$$

여기에서 W_t^Q 는 Q 축도 하의 표준위너과정(standard Wiener process)이며, Σ 는 $c_i = \frac{\sigma_i^2}{2} \Delta t$ 로 부터 얻어지는 σ_i 를 대각원소로 가지는 $(N \times N)$ 대각행렬이다.

$DA_0(N)$ 모형에서는 상태변수 X_t 가운데 조건부확률변동성을 유발하는 상태변수 Z_t 가 포함되지 않기 때문에 식 (4-18)과 같은 AR(1) 과정들의 결합인 NVAR(1) 과정이다. 따라서 상태변수 X_t 는 Car(1) 과정이다. 이 경우 Φ 는 파라미터 식별을 위하여 하삼각행렬(lower triangular matrix) 혹은 상삼각행렬(upper triangular matrix)이 된다.

이상과 같이 상태변수의 확률과정을 가정하면 LSD의 $DA_M^Q(N)$ 모형에서 N 차원의 상태변수 $X_t = (Z_t', Y_t')$ 는 항상 Car(1) 과정이다. 이에 따라 LSD는 이러한 상태변수의 조건부라플라스변환을 다음과 같이 정의한다.

$$\phi^Q(u|X_t) = E^Q [\exp(u'X_{t+1})|X_t] = \exp[a(u) + b(u)X_t] \quad (4-37)$$

여기서 $a(u)$ 는 스칼라, $b(u)$ 는 N 차원의 행벡터이며, 모두 시점 t 에서 이용 가능한 정보집합의 확정함수이다. 그리고 LSD의 단기이자율은 DS의 $A_M^Q(N)$ 에서처럼 상태변수 X_t 의 선형함수이다.

$$r_{t+1} = \delta_0 + \delta_X' X_t \quad (4-38)$$

여기서 δ_0 는 스칼라이며 δ_X 는 $\delta_X > 0$ 을 충족하는 N 차원의 벡터이다²⁵⁾. 잔존만기 n 인 무이표채가격 함수 $P_{t,n} = \exp(-A_n - B_n' X_t)$ 를 Q 측도 하의 채권가격식인 식 (2-16)에 대입하여 정리하면 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = \delta_0 + A_{n-1} - a(-B_{n-1}) \\ B_n = \delta_X - b(-B_{n-1}) \end{cases} \quad (4-39)$$

25) $\delta_X > 0$ 의 제약은 연속시간 $A_M^Q(N)$ 모형에서의 제약보다 강한 제약이다. 이 경우, $M > 0$ 인 $DA_M^Q(N)$ 모형에서 단기이자율수준과 M 차원 상태변수벡터 Z_t 가 항상 양의 상관관계를 가진다는 제약을 가하는 것이 된다. 이와 관련된 논의는 LSD(2010)에서 다룬다.

지금까지 살펴본 LSD의 $DA_M^Q(N)$ 모형에서는 위험의 시장가격과 SDF에 대한 구체적인 가정을 하지 않는다. 단지 Q 측도 하의 상태변수 조건부라 플라스변환이 Car(1) 과정이라는 특성과 단기이자율에 대한 설정만을 가지고 Q 측도 하의 가격결정식을 이용하여 채권가격을 결정한다. 하지만 실증분석을 위해서는 Q 측도 하의 상태변수 X_t 의 확률과정을 P 측도 하의 확률과정으로 변환하여야 하며, 이 때 식 (4-4)와 같은 무차익원리를 충족하는 지수선형 SDF가 필요하다. 그러나 LSD는 Weil(1989)과 Epstein and Zin(1991)의 비기대효용함수 및 Campbell and Cochrane(1999)의 외부적 소비습관모형으로부터 식 (4-7) 또는 식 (4-8)과 같은 SDF를 도출하기 때문에 따로 SDF를 설정하지 않는다. 하지만 일반균형모형이 아닌 축약형모형을 가정하는 경우에는 식 (4-4)와 같은 지수선형 SDF가 필요하며, 이를 위해서는 식 (4-4)에서 $\alpha(X_t)$ 에 해당하는 위험의 시장가격 $\lambda(X_t)$ 를 반드시 설정하여야 한다.

LSD는 위험의 시장가격을 Cheridito et al.(2007)과 유사하게 다음과 같이 설정한다.

$$\lambda(X_t) = (\Sigma S_t \Sigma')^{-1} (\mu^P(X_t) - \mu^Q(X_t)) \quad (4-40)$$

여기서 $\mu^P(X_t)$ 와 $\mu^Q(X_t)$ 는 각각 P 측도와 Q 측도 하의 상태변수의 조건부평균을 나타낸다. LSD는 P 측도 하에서 Cheridito et al.(2007)에서와 같이 암묵적으로 위험의 시장가격을 설정할 뿐만 아니라 P 측도 하의 상태변수가 설명하고자 하는 특성을 고려한 $\lambda(X_t)$ 를 제안 한다²⁶⁾. 그러나 위험의 시장가격은 P 측도와 Q 측도를 연결시켜주는 역할을 하므로 $\lambda(X_t)$ 가 유연하게 설정될수록 P 측도와 Q 측도 사이의 연관관계가 약화된다. 이처럼 유연한 $\lambda(X_t)$ 를 통해 Q 측도에 의해서 결정되는 이자율기

26) LSD는 우도함수가 잘 정의되기 위해서는 Q 측도 하에서 VARG(1) 과정을 따르는 P 측도 하의 상태변수 Z_t 가 기하 에르고딕성(geometric ergodicity)을 충족하도록 $\lambda(X_t)$ 가 설정되어야 한다고 제시하고 있다. 이와 관련된 자세한 논의는 LSD(2010)에서 다룬다.

간구조의 횡단면적 특성을 잘 설명할 수 있고, 아울러 P 측도에서 결정되는 상태변수의 동태적 특성을 쉽게 설명할 수 있다.

식 (4-40)와 같이 $\lambda(X_t)$ 를 정의하고, 식 (4-16)와 식 (4-15)의 관계를 이용하면 Q 측도를 P 측도로 변환하는데 필요한 $\frac{dP}{dQ}$ 와 P 측도 하의 상태변수 조건부라플라스변환을 얻을 수 있으며, 이를 통해 P 측도 하의 상태변수 X_t 의 조건부확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$f^P(X_{t+1}|X_t) = \left(\frac{dP}{dQ} \right)(X_{t+1}; \lambda_t) \times f^Q(X_{t+1}|X_t) \quad (4-41)$$

식 (4-41)를 이용하면 실증분석에서 우도함수를 이용한 최우추정법(MLE)을 사용할 수 있다.

LSD는 Q 측도를 P 측도로 변환하는데 필요한 $\frac{dP}{dQ}$ 를 다음과 같은 조건부Esscher변환을 이용하여 직접적으로 구한다²⁷⁾.

$$\left(\frac{dP}{dQ} \right)(X_{t+1}; \lambda_t) = \frac{\exp(\lambda_t' X_{t+1})}{\phi^Q(\lambda_t; X_t)} \quad (4-42)$$

이를 통해 λ_t 를 식 (4-40)과 같이 정의할 때 추가적으로 고려해야 하는 제약조건을 얻는다.

$$\begin{cases} \text{Prob}[\lambda_{i,t} c_i < 1] = 1 & , \quad 1 \leq \forall i \leq M \\ \text{Prob}[\lambda_{i,t}^i < \infty] = 1 & , \quad M+1 \leq \forall i \leq N \end{cases} \quad (4-43)$$

LSD의 $DA_M^Q(N)$ 모형은 DK와 DS의 $A_M(N)$ 을 이산화한 BTF나 BDF 모형이 가지는 문제를 대부분 해결한다. 특히, 이들 이산화모형은 축약형

27) 이산시간 확률과정에서 식 (4-42)와 같은 Esscher변환은 연속시간에서 Girsanov정리에 해당한다.

모형이므로 동태적 일반균형분석을 위해서는 다소 무리한 근사와 생략을 필요로 하지만 LSD의 $DA_M^Q(N)$ 모형은 채권수익률의 정확한 우도함수를 얻을 수 있으므로 그러한 무리가 따르지 않는다.

LSD는 식 (4-7)과 식 (4-8)의 지수선형 SDF를 포괄하는 일반적인 지수선형 SDF를 설정하고 이산시간모형을 도출하였다. 이러한 이산시간모형을 포함하는 일반균형모형을 정의하고 이에 대한 캘리브레이션(calibration) 및 최우추정을 한 결과 외부적 소비습관모형 또는 비기대 효용함수 하에서 얻은 SDF가 채권의 수익률에 관한 의문현상을 설명하기에 충분하지 않다는 분석결과를 제시하였다²⁸⁾.

제 3 절 이산시간 위샤프 이자율 기간구조모형

위샤프 이자율기간구조모형은 연속시간 QTSM에 상응하는 정확한 이산시간 QTSM이다(이하 WQTSM). ABD모형은 Ahn et al.(2002), Leipold and Wu(2002)의 QTSM을 이산화한 것임에 반해, WQTSM은 이산시간 지수선형과정인 Car 과정을 사용한다. 여기서는 Grouerieroux and Sufana(2011)에 의해 제시된 WQTSM에 대해 살펴보기로 한다.

WQTSM에서는 잔존만기 n 인 채권가격 $P_{t,n}$ 이 다음과 같은 형태로 나타난다.

$$P_{t,n} = \exp(Tr[A_n Y_t] + b_n) \quad (4-44)$$

여기에서 $Tr[\cdot]$ 은 트레이스 연산자이며, A_n 은 $N \times N$ 행렬, b_n 은 스칼라인 잔존만기(n)에 의존하는 함수이다. 그리고 Y_t 는 P 측도 하에서 식 (4-27)의 $WAR_N(K, M, I)$ 을 따르는 $(N \times N)$ WAR(1) 과정이다. 이 때 $\epsilon_{k,t+1}$ 은 다변량표준정규분포이다.

WQTSM에서 SDF는 다음과 같은 상태변수의 지수선형함수로 설정된다.

28) 채권 수익률에 대한 의문현상(term premium puzzle or expectation puzzle)은 채권수익률곡선이 기대가설이 설명하는 것과 일치하지 않는 것을 의미한다.

$$M_{t+1} = \exp [\text{Tr} (C_0 Y_{t+1}) + \text{Tr} (C_1 Y_t) + d] \quad (4-45)$$

여기서 C_0 와 C_1 은 $(N \times N)$ 대칭반정부호행렬(symmetric negative semi-definite matrix)이며, d 는 $\frac{K}{2} \log \det (I - C_0) \geq d$ 인 스칼라이다. 식 (4-45)에서 대칭행렬 C 는 식 (4-4)의 $\alpha(X_t)$ 에 해당하며, d 는 $\beta(X_t)$ 에 해당한다. 식 (4-44)와 식 (4-27)의 상태변수 Y_{t+1} 의 동태방정식을 채권가격 결정식에 대입하여 정리하면 $\{A_n, b_n\}$ 에 대한 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = M' [C + A_{n-1}] (I - 2 [C_0 + A_{n-1}])^{-1} M + C_1 \\ b_n = d + b_{n-1} - \frac{K}{2} \log \det [I - 2 (C_0 + A_{n-1})] \end{cases}, \quad n \geq 1 \quad (4-46)$$

$P_{t+n,0} = 1$ 로부터 얻어지는 초기조건 $\{A_0 = \mathbf{0}_{N \times N}, b_0 = 0\}$ 을 이용하여 $\{A_n, b_n\}$ 을 얻을 수 있지만 채권수익률이 항상 비음(nonnegative)이 되기 위해서는 ① A_n 은 음반정부행렬이어야 하며, ② $\text{Tr}[A_n Y_t] \leq 0$, ③ $A_n < A_{n-1}$ 그리고, ④ $-\frac{b_n}{n} \geq 0$, $-\frac{b_{n+1}}{n+1} > -\frac{b_n}{n}$ 의 네 가지 조건이 충족되어야 한다[Gourieroux and Sufana(2011)].

P 측도 하의 식 (4-26)을 식 (4-13)에 대입하면 다음과 같은 Q 측도 하의 조건부로그라플라스변환을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_t^Q(\Gamma) &= \log [E_t^Q \{ \exp (\text{Tr} \Gamma y_{t+1}) \}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} [M' \{ [I - 2 (C_0 + \Gamma)]^{-1} - (I - 2 C_0)^{-1} \} M Y_t] \\ &\quad - \frac{K}{2} \log \det [(I - 2 (I - 2 C_0)^{-1} \Gamma)] \end{aligned} \quad (4-47)$$

식 (4-47)이 상태변수의 선형과정이므로 Q 측도 하에서도 상태변수행렬

Y_t 가 Car(1) 과정임을 알 수 있다. 여기서 Y_t 가 P 측도와 Q 측도 하에서 모두 Car(1) 과정이므로 WQTSM은 연속시간모형을 이산화한 것과 달리 정확한 이산시간 지수선형모형에 속한다. Grourieroux and Sufana(2011)는 이러한 WQTSM으로부터 얻어지는 채권수익률의 조건부 1차 및 2차 적률과 함께 이산시간 WAR(1) 과정에 상응하는 연속시간 WAR(1) 과정과 연속시간 QTSM과의 관계에 대해 논의하고 있다. 또한, 앞 절에서 논의된 WAR(1) 과정 중 각주 19)에 제시된 조건부확률밀도함수를 이용하여 WQTSM을 추정하는 것이 쉽지 않으므로 WQTSM을 추정하기 위해서는 Leipold and Wu(2003)에서와 같이 관측된 이자율기간구조 자료의 1차 또는 2차 적률과 라플라스변환으로부터 도출되는 적률의 차를 적률 조건으로 이용하는 GMM추정법이나 ADG에서와 같은 EMM추정법을 이용할 수 있다.

제 4 절 이산시간 국면전환 이자율 기간구조모형

선형 이자율 기간구조모형들은 경기변동, 통화정책변화 등에 따른 이자율기간구조의 비선형 또는 비대칭적인(nonlinear or asymmetric) 특성을 설명할 수 없다. 이러한 한계점은 LSD의 $DA^Q_M(N)$ 에서도 동일하게 적용된다. 연속시간모형을 이산화한 Bansal and Zhou(2002), Bansal et al.(2004), Ang et al.(2008)의 국면전환 이자율 기간구조모형은 지수선형모형의 범주에 포함되지 않는다. 그러나 이산시간 국면전환 이자율 기간구조모형(discrete time regime switching interest rate term structure model, 이하 RS-DATSM)은 이산시간 지수선형모형의 범주에 포함된다. RS-DATSM은 Car(1) 과정인 VAR(1) 과정이나 VARG(1) 과정을 식 (4-25)의 시간동질적인 마르코프체인과 결합하는 방식으로 설정된다. 이러한 Car(1) 과정들의 결합으로 구성되는 RS-DATSM은, P 측도 하에서 시변국면전환확률로 설정하는 것이 이자율기간구조의 비선형성과 비대칭성을 포착하는데 있어서 더 효율적이다. 본 절에서는 Monfort and

Pegoraro(2006b, 2007)에서 제시된 일반적인 RS-DATSM에 대해서 살펴보기로 한다. AP모형을 확장한 Dai et al.(2007)의 국면전환모형은 Monfort and Pegoraro(2006b, 2007)의 RS-DATSM에 포함된다. 국면전환 단일요인 모형을 다요인 모형으로 확장하는 것은 비교적 간단하므로 여기서는 단일요인 모형을 중심으로 이산시간 국면전환모형을 살펴보기로 한다.

먼저, 국면전환을 나타내는 J 차원의 이산상태변수(J -state discrete state variable)를 z_t , 상태변수를 x_t 라 할 때, P 측도 하에서 상태변수 x_t 의 동태방정식은 다음과 같이 일반적인 국면전환 AR(p) 과정을 따른다.

$$x_{t+1} = \nu(Z_t) + \phi_1(Z_t)x_t + \cdots + \phi_p(Z_t)x_{t+1-p} + \sigma(Z_t)\epsilon_{t+1} \quad (4-49)$$

여기에서 $\epsilon_{t+1} \sim i.i.dN(0, 1)$ 이며, $Z_t = (z_t', \dots, z_{t-p}')'$ 는 $J(p+1)$ 차원의 벡터이다. 그리고 z_t 는 국면전환확률이 상태변수의 함수인 비동질적인(non-homogeneous) 마르코프체인이다.

$$\Pr [z_{t+1} = e_j | z_t = e_i, x_{0:t}] = \pi(e_i, e_j; X_t) \quad (4-50)$$

여기에서 e_i 는 J 차원 항등행렬의 i 번째 열을 나타내며, $X_t = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t+1-p})'$ 이다. 식 (4-49)와 식 (4-50)과 같은 P 측도 하에 상태변수의 동태방정식은 계수 $\{\nu(Z_t), \phi_1(Z_t), \dots, \phi_p(Z_t)\}$ 와 조건부표준편차 $\sigma(Z_t)$ 가 모두 시변전이확률(time-varying transition probability)로 국면전환 할 뿐만 아니라 이들 계수들과 표준편차의 국면전환이 t 시점의 z_t 뿐만 아니라 $p+1$ 기전까지의 전체 국면전환 상태변수 Z_t 에 의존하는 특징을 가진다. 식 (4-49)는 행렬을 이용하여 식 (4-51)과 같이 간략하게 쓸 수 있다.

$$x_t = \nu(Z_t) + \phi(Z_t)' X_t + \sigma(Z_t) \epsilon_{t+1} \quad (4-51)$$

여기에서 $\phi(Z_t) = (\phi_1(Z_t), \dots, \phi_p(Z_t))$ 이다. 이러한 상태변수의 동태방정식을 보면 z_t 의 전이확률이 상수가 아니므로 P 측도 하에서 (x_t, z_t) 는 Car(1)과정이 아니다.(이는 조건부로그라플라스변환을 통해서 알 수 있다).

다음으로 SDF M_{t+1} 은 다음과 같은 지수선형함수로 가정된다.

$$M_{t+1} = \exp \left[-\delta_X' X_t - \delta_Z' Z_t - \frac{1}{2} \Lambda_t(Z_t, X_t)^2 - \Lambda_t(Z_t, X_t) \epsilon_{t+1} - \Gamma(Z_t, X_t)' z_{t+1} \right] \quad (4-52)$$

여기에서 δ_X 와 δ_Z 는 p 차원과 $J(p+1)$ 차원의 벡터이다. 그리고 $\Lambda_t(Z_t, X_t)$ 와 $\Gamma(Z_t, X_t)$ 는 각각 연속상태변수 x_{t+1} 에 포함된 위험의 시장가격(market price of factor risk)을 나타내는 스칼라 함수와 국면전환위험의 시장가격(market price of regime switching risk)을 나타내는 J 차원의 벡터함수로 다음과 같다.

$$\begin{cases} \Lambda(Z_t, X_t) = \lambda_0(Z_t) + \lambda(Z_t)' X_t \\ \Gamma(Z_t, X_t) = [\gamma_1(Z_t, X_t), \dots, \gamma_J(Z_t, X_t)]' \end{cases} \quad (4-53)$$

여기에서 $\lambda_0(Z_t)$ 는 스칼라함수이며, $\lambda(Z_t)$ 는 p 차원의 벡터함수이다. 식 (4-53)에서 $\Lambda_t(Z_t, X_t)$ 를 보면, 연속상태변수 x_{t+1} 에 포함된 위험의 시장가격이 Z_t 에 의존하는 $\lambda_0(Z_t)$, $\lambda(Z_t)$ 에 의해 X_t 의 선형함수로 설정되어 있으므로 동일한 X_t 에 대해서도 국면에 따라 위험의 시장가격이 달라질 수 있는 상황을 설명할 수 있다. 그리고 각 국면으로 전환위험의 시장가격 또한 X_t 와 Z_t 의 함수이므로 국면전환위험의 시장가격도 매우 유연하게 설정된 것임을 알 수 있다.

식 (4-52)의 M_{t+1} 에 무차익거래 조건을 부과하면 식 (4-54)의 관계가

성립하여야 한다.

$$E_t[M_{t+1}] = \exp(-r_{t+1}) = \exp[-\delta_X' X_t - \delta_Z' Z_t] \left(\sum_{j=1}^J \pi(e_i, e_j; X_t) \exp[-\Gamma(Z_t, X_t)' e_j] \right) \quad (4-54)$$

식 (4-54)에 아래 식(4-55)의 제약을 부과하면,

$$\sum_{j=1}^J \pi(e_i, e_j; X_t) \exp[-\Gamma(Z_t, X_t)' e_j] = 1, \forall Z_t, X_t \quad (4-55)$$

다음과 같이 단기이자율이 상태변수의 선형함수가 된다.

$$r_{t+1} = \delta_X' X_t + \delta_Z' Z_t \quad (4-56)$$

식 (4-49)~식 (4-56)과 같이 모형을 설정하는 경우, 이로부터 유도되는 무이표채가격은 일반적으로 상태변수의 지수선형함수가 아니다. 이산시간에서 상태변수의 지수선형함수로 얻어지는 무이표채가격을 얻기 위해서는 Q 측도 하에서 상태변수 $(x_t, z_t)'$ 가 Car 과정이라는 Gourioux et al.(2002)에서 제시된 조건이 충족되어야 한다. 이를 위해서는 식 (4-49)와 식 (4-50)에서 P 측도 하의 상태변수 $(x_t, z_t)'$ 를 Q 측도 하의 상태변수로 $(x_t, z_t)'$ 로 전환한 다음, 전환된 상태변수의 조건부라플라스 변환이 Car 과정이 되는 제약이 부과되어야 한다. 이를 위해서 식 (4-52)와 식 (4-54)~식 (4-56)을 통해 식 (4-56)의 측도변환을 위한 $\frac{dQ}{dP}$ 를 얻을 수 있고 이를 이용하여 다음과 같은 Q 측도 하의 상태변수 $(x_t, z_t)'$ 의 로그라플라스변환을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \log [E_t^Q [\exp (u x_{t+1} + v' z_{t+1})]] &= u ([\phi(Z_t) + \lambda(Z_t) \sigma(Z_t)]' X_t + [\nu(Z_t) + \lambda_0(Z_t)]) \\ &\quad + \frac{1}{2} u^2 \sigma(Z_t)^2 + \sum_{j=1}^J \pi(z_t, e_j; X_t) \exp((v - \gamma(Z_t, X_t))' e_j) \end{aligned}$$

이러한 Q 측도 하의 로그라플라스변환으로부터 다음과 같은 Q 측도 하의 $(x_t, z_t)'$ 의 동태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} x_{t+1} = [\nu(Z_t) + \lambda_0(Z_t) \sigma(Z_t)] + [\phi(Z_t) + \lambda(Z_t) \sigma(Z_t)]' X_t + \sigma(Z_t) \epsilon_{t+1}^Q \\ \Pr^Q [z_{t+1} = e_j | Z_t, X_t] = \pi(z_t, e_j; X_t) \exp [(-\Gamma(Z_t, X_t))' e_j] \end{cases} \quad (4-57)$$

여기에서 $\epsilon_{t+1}^Q \sim i.i.dN(0,1)$ 이다. Q 측도에서 식 (4-57)과 같은 동태방정식을 가진 $(x_t, z_t)'$ 가 Car 과정이 되기 위해서는 식 (4-57)를 다음의 형태로 나타낼 수 있어야 한다.

$$\begin{cases} x_{t+1} = \nu^* ' Z_t + \phi^* X_t + (\sigma^* ' Z_t) \epsilon_{t+1}^Q \\ \Pr^Q [z_{t+1} = e_j | z_t = e_i] = \pi^* (e_i, e_j) \end{cases} \quad (4-58)$$

여기에서 ν^* 는 $J(p+1)$ 차원의 벡터 그리고 ϕ^* 는 $(p \times p)$ 차원 AR(p)과정의 동반행렬(companion matrix)이다. 식 (4-58)에서 $\pi^*(e_i, e_j)$ 는 Q 측도 하에서 이산상태변수 z_t 의 전이확률밀도함수가 일정한 시간동질적인 마르코프체인임을 의미한다. 식 (4-58)을 통해 P 측도 하의 상태변수의 동태방정식과 SDF에 다음의 제약이 부과된다.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \sigma(Z_t) &= \sigma^{*'} Z_t \\
\text{(ii)} \quad \lambda_0(Z_t) &= \frac{\nu^{*'} Z_t - \nu(Z_t)}{\sigma^{*'} Z_t} \\
\text{(iii)} \quad \lambda(Z_t) &= \frac{\phi^* - \phi(Z_t)}{\sigma^{*'} Z_t} \\
\text{(iv)} \quad \Gamma_j(Z_t, X_t) &= \log \left[\frac{\pi(z_t, e_j, X_t)}{\pi^*(z_t, e_j)} \right]
\end{aligned} \tag{4-59}$$

식 (4-59)에서 (iv)는 단기이자율이 상태변수의 선형함수이기 위해 식 (4-55)에서 부과한 제약과 동일함을 알 수 있다. 또한, (iv)는 국면전환 위험의 시장가격 Γ_j , $j \in \{1, \dots, J\}$ 가 모두 같은 부호를 가질 수 없다는 것을 의미한다. 이는 모두 같은 양의 부호를 가지는 경우에 $\pi(z_t, e_j; X_t) > \pi^*(z_t, e_j)$, $\forall j$ 의 관계가 성립하고, 모두 같은 음의 부호를 가지는 경우는 $\pi(z_t, e_j; X_t) < \pi^*(z_t, e_j)$, $\forall j$ 의 관계가 성립함을 뜻하기 때문이다. 그러나 $\pi(z_t, e_j; X_t)$ 와 $\pi^*(z_t, e_j)$ 는 각각 P 측도와 Q 측도 하의 국면전환확률로 $\sum_{j=1}^J \pi(z_t, e_j; X_t) = \sum_{j=1}^J \pi^*(z_t, e_j) = 1$ 이 성립해야 하므로 모두 양의 부호를 가지거나 모두 음의 부호를 가질 수는 없다.

식 (4-59)의 제약이 부가되면, 식 (4-58)은 Car(p+1) 과정이 되므로 다음과 같이 상태변수의 지수선형함수인 잔존만기 n 의 무이표채가격을 얻을 수 있다.

$$P_{n,t} = \exp(A_n' X_t + B_n' Z_t) \tag{4-60}$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 각각 잔존만기 n 에 의존하는 p 차원의 벡터함수와

$J(p+1)$ 차원의 벡터함수이다. 식 (4-58)에서 AR(p)로 표현된 Q 측도 하에 x_{t+1} 의 동태방정식은 VAR(1) 과정으로 다시 쓸 수 있다.

$$X_{t+1} = \Phi^* X_t + [\nu^{*'} Z_t + (\sigma^{*'} Z_t) \epsilon_{t+1}^Q] \tilde{e}_1 \quad (4-61)$$

여기에서 \tilde{e}_1 은 p 차원 항등행렬의 첫 번째 열을 나타낸다. 그리고 Φ^* 는 다음과 같은 $(p \times p)$ 동반행렬(companion matrix)이다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1^* & \cdots & \cdots & \phi_{p-1}^* & \phi_p^* \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

식 (4-61)을 Q 측도 하의 기초채권가격결정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 $\{A_n, B_n\}$ 에 대한 차분방정식체계를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} A_n = -\delta_X + \Phi^* A_{n-1} \\ B_n = -\delta_Z + A_{1,n-1} \nu^* + \frac{1}{2} A_{1,n-1}^2 \sigma^{*2} + \tilde{B}_{n-1} + F(B_{1,n-1}) \end{cases} \quad (4-62)$$

여기에서 $A_{1,n-1}$ 은 A_{n-1} 의 p 차원 첫 번째 원소를, $B_{1,n-1}$ 은 $J(p+1)$ 차원 벡터인 B_{n-1} 의 첫 번째 J 개의 원소로 구성된 벡터를 나타낸다. B_{n-1} 에서 $B_{1,n-1}$ 을 제외한 나머지 Jp 차원의 벡터를 $B_{2,n-1}$ 라 하면, $\tilde{B}_{n-1} = (B_{2,n-1}', 0_{J \times 1})$, $F(B_{1,n-1}) = \iota_1 \otimes a_z(B_{1,n-1}, \pi^*)$ 이다. 이때 ι_1 은 $p+1$ 차원의 항등행렬의 첫 번째 열을 나타낸다. 그리고 $a_z(B_{1,n-1}, \pi^*)$ 는 다음과 같은 i 번째 원소를 가지는 J 차원 벡터이다.

$$a_z(B_{1,n-1}, \pi^*)_i = \log \left(\sum_{j=1}^J \exp(B_{1,n-1}' e_j) \pi^*(e_i, e_j) \right) \quad , \quad i = 1, \dots, J$$

$P_{0,t+n} = 1$ 의 경계조건으로부터의 초기조건 $\{A_0 = \mathbf{0}_{p \times 1}, B_0 = \mathbf{0}_{J(p+1) \times 1}\}$ 을 이용하여 식 (4-62)의 차분방정식을 추차적으로 계산하면 $\{A_n, B_n\}$ 을 얻을 수 있다.

이상에서 살펴본 일반적인 국면전환 이자율 기간구조모형을 다요인 모형으로 확장하는 경우 지나치게 많은 파라미터를 포함하게 되어 일반적으로 추정이 용이하지 않다. Dai et al.(2007)은 3요인 이자율 기간구조모형에 대한 실증분석에서 식 (4-53)의 $\lambda(Z_t)$, 식 (4-58)의 ϕ^* 를 Z_t 에 의존하지 않는 상수로 설정하였다. Monfort and Pegoraro(2007)는 이와 동일한 2요인 모형과 3요인 모형에 대해 실증분석을 하였다. 그리고 논의에서는 정규분포를 가정하는 모형을 살펴보았으나 Monfort and Pegoraro(2006b)는 상태변수 x_t 가 ARG(p) 과정을 따르는 단일요인 모형과 이를 다요인 모형으로 확장한 VARG(p) 과정을 따르는 국면전환 이자율 기간구조모형을 제시하였다.

제 5 절 효율적인 이자율 기간구조모형 설정

이산시간 이자율 기간구조모형에서 무이표채가격이 상태변수의 지수선형함수가 되기 위해서는 Q 측도 하에서 상태변수의 확률과정이 Car 과정이고 단기이자율이 상태변수의 선형함수여야 한다. LSD의 $DA_M^Q(N)$ 모형은 Q 측도 하에서 상태변수의 동태방정식을 먼저 설정하지만, WQTSM과 RS-DATSM은 P 측도 하에서 상태변수의 동태방정식을 먼저 설정하였다. 그러나 어떤 방식을 따르더라도 지수선형함수의 채권가격을 얻기 위해서는 항상 Q 측도 하에서 상태변수의 확률과정이 Car 과정이어야 한다. RS-DATSM에서 논의 한 것과 같이 P 측도 하의 상태변수를 먼저

설정하는 경우, Q 측도 하의 상태변수의 확률과정이 Car 과정이 되도록 하기 위하여 식 (4-59)와 같은 제약을 추가적으로 부과하여야 한다. 그러나 실증분석 과정에서 일반적인 식별조건, 허용조건, 상태변수의 안정성 조건 등이 이 제약과 함께 부과되는 경우 모형 추정이 어려워진다. 여기에서는 실증분석에서 발생하는 이러한 문제점을 극복하는 방안으로 Bertholon et al.(2008)이 제시한 일반적인 자산가격 결정모형에 대한 모형설정 방법론을 살펴보고자 한다. 여기서 제시되는 방법은 모형의 분석 목적과 모형에 대한 실증분석 과정에서 발생할 수 있는 추정상의 문제점을 고려하여 선택될 수 있다.

1. 단기이자율

단기이자율은 다음과 같이 일반적인 함수형태로 정의한다.

$$\{ r_{t+1}(X_t, \tilde{\theta}), \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta} \} \quad (4-63)$$

여기에서 $X_t = \{x_t, x_{t-1}, \dots, x_0\}$ 이며, x_t 는 상태변수를 나타낸다. 그리고 $\tilde{\theta}$ 는 단기이자율함수에 포함된 파라미터를 나타내며, $\tilde{\Theta}$ 는 $\tilde{\theta}$ 가 속하는 파라미터공간(parameter space)을 나타낸다. 식 (4-63)에서 단기이자율의 함수형태 $r_{t+1}(\cdot)$ 은 알고 있는 것으로 가정되며, 이자율 기간구조모형에서는 항상 상태변수의 선형함수로 설정된다.

2. Direct Modeling

Direct Modeling은 P 측도 하의 상태변수의 확률과정을 다음과 같은 조건부로그라플라스변환으로 먼저 표현한다.

$$\{ \psi_t(u | X_t, \theta_1), \theta_1 \in \Theta_1 \} \quad (4-64)$$

여기서 θ_1 은 P 측도 하에서 상태변수의 로그라플라스변환에 포함된 파라미터이며, Θ_1 은 θ_1 이 속하는 파라미터공간을 나타낸다. 다음으로 SDF를 상태변수의 지수선형함수로 가정한다.

$$M_{t+1} = \exp[\alpha_t (X_t)' x_{t+1} + \beta_t (X_t)] \quad (4-65)$$

지수선형 SDF는 X_t 의 함수인 $\alpha_t(X_t)$ 를 포함하고 있으며 $\alpha_t(X_t)$ 는 이자율 기간구조모형에서 위험의 시장가격에 해당한다. 따라서 식 (4-63)의 의미를 가지도록 하기 위해서는 $\alpha_t(X_t)$ 를 다음과 같이 설정한다.

$$\{ \alpha_t (X_t, \theta_2), \theta_2 \in \Theta_2 \} \quad (4-66)$$

여기에서 θ_2 는 위험의 시장가격에 포함된 파라미터이며, Θ_2 는 그 파라미터 공간이다. 식 (4-66)와 $E_t[M_{t+1}] = \exp(-r_{t+1})$ 를 이용하여 식 (4-64)를 정리하면 다음과 같이 무차익거래 조건이 충족되는 지수선형 SDF를 얻을 수 있다.

$$M_{t+1}(X_t, \theta) = \exp[\alpha_t'(X_t, \theta_2) x_{t+1} - r_{t+1}(X_t, \tilde{\theta}) - \psi_t(\alpha_t(\underline{x}_t, \theta_2) | X_t, \theta_1)] \quad (4-67)$$

여기서 $\theta = (\tilde{\theta}', \theta_1', \theta_2')' \in \tilde{\Theta} \times \Theta_1 \times \Theta_2 = \Theta$ 이다. 상태변수에 단기이자율이 포함되는 경우, 파라미터 $\tilde{\theta}$ 는 한 점으로 축약된다. 이를 이용하여 $s > t$ 기에 $g(X_s)$ 를 주는 자산의 가격($P(X_t)$)은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$P(X_t) = E[M_{t+1}(\theta) \cdots M_{s-1}(\theta) M_s(\theta) g(X_s) | X_t, \theta_1] \quad (4-68)$$

Q 측도 하의 상태변수 확률과정은 조건부로그라플라스변환 $\psi_t^Q(u | X_t)$ 로 나타낼 수 있다. P 측도 하에서 로그라플라스변환 식 (4-64)와 식 (4-67)의 $\alpha_t(X_t)$ 를 식 (4-13)의 관계에 대입하면 Q 측도 하의 상태변수의 조건부로그라플라스변환을 얻을 수 있다.

$$\psi_t^Q(u | X_t, \theta_1, \theta_2) = \psi_t[u + \alpha_t(X_t, \theta_2) | X_t, \theta_1] - \psi_t[\alpha_t(X_t, \theta_2) | X_t, \theta_1] \quad (4-69)$$

자산가격이 지수선형함수가 되기 위해서는 식 (4-69)의 Q 측도 하에서 상태변수의 조건부로그라플라스변환이 Car 과정이어야 한다. 이는 P 측도 하의 로그라플라스변환 식 (4-64)와 식 (4-69)의 $\alpha_t(X_t, \theta_2)$ 에 일정한 제약이 부과될 때 가능하다. 이자율 기간구조모형의 경우 이러한 제약은 P 측도 하의 상태변수의 동태방정식과 위험의 시장가격설정이 충분히 유연하지 않을 수 있다는 것을 뜻한다. 또한, 이와 같은 방법으로 모형을 설정하는 경우 식 (4-69)의 조건부로그라플라스변환인 Q 측도 하의 상태변수의 동태방정식은 부가적으로 얻어지게 되므로 이것에 의해서 특징지어지는 자산가격의 횡단면적인 특성을 충분히 설명하기 어렵다. 이는 이자율 기간구조모형에서 Q 측도 하에서 결정되는 이자율기간구조 형태를 충분히 유연하게 설정하기가 어려울 수 있음을 의미한다.

3. RN Constrained Direct Modeling

RN(risk neutral) Constrained Direct Modeling에서는 자산가격의 횡단면적인 특성을 충분히 설명할 수 있도록 Q 측도 하에 상태변수의 동태방정식과 단기이자율을 설정하고, 동시에 자산가격의 동태적인 특성도 충분히 설명할 수 있도록 P 측도 하에 상태변수의 동태방정식을 설정한다. 보다 구체적으로, 먼저 단기이자율은 식 (4-63)과 같이 가정하고 P 측도 하에 상태변수의 조건부로그라플라스변환은 식 (4-64)와 같이 설정한다.

다음으로 무차익거래 제약을 충족하는 Q 측도 하에 상태변수의 확률과정을 Car 과정의 조건부로그라플라스변환으로 설정할 수 있다.

$$\{ \psi_t^Q(u | X_t, \theta^*), \theta^* \in \Theta^* \} \quad (4-70)$$

여기에서 θ^* 는 Q 측도 하의 상태변수의 조건부로그라플라스변환에 포함된 파라미터이며, Θ^* 은 θ^* 의 파라미터 공간을 나타낸다. 이 경우 Q 측도 하의 상태변수가 Car 과정이므로 항상 상태변수의 지수선형함수로 표현되는 자산가격 결정식을 얻을 수 있다. 또한, Q 측도 하의 조건부로그라플라스변환과 P 측도 하의 조건부로그라플라스변환은 식 (4-13)에 의해 아래의 조건을 항상 충족한다.

$$\psi_t^Q(u | X_t) = \psi_t^P[u + \alpha_t(X_t) | X_t] - \psi_t^P[\alpha_t(X_t) | X_t] \quad (4-71)$$

Q 측도 하의 조건부로그라플라스변환 ψ_t^Q 와 P 측도 하의 조건부로그라플라스변환을 모두 결정하였으므로 $\alpha_t(X_t)$ 는 식 (4-71)의 관계를 충족하도록 결정된다. 이러한 경우에는 Direct Modeling에서와 달리 $\alpha_t(X_t)$ 를 설정할 필요가 없다. 이자율 기간구조모형의 경우 위험의 시장가격이 명시적으로 설정되지 않고 식 (4-71)의 관계에 의해서 암묵적으로 주어진다. 따라서 위험의 시장가격 함수형태가 유연할 수 있는 장점이 있다. Cheridito et al.(2007)은 RN Constrained Direct Modeling 방법으로 설정되는 일반적인 연속시간 이자율 기간구조모형을 제시하였다.

4. Back Modeling

Back Modeling은 연속시간 가격결정모형에서 일반적으로 이용되는 방법으로, DK와 DS가 연속시간 이자율 기간구조모형 설정에서 이러한 방

법을 따르고 있다. Back Modeling에서는 먼저 식 (4-63)의 단기이자율과 식 (4-70)의 무차거래조건을 충족하는 Q 측도 하의 Car 과정을 따르는 상태변수의 로그라플라스변환을 정의한다. 이때 RN Constrained Direct Modeling에서처럼 항상 상태변수의 지수선형모형으로 얻어지는 자산가격결정식을 얻을 수 있다. 그러나 자산가격의 동태적인 특성을 충분히 포착할 수 있도록 상태변수의 P 측도 하에 조건부로그라플라스변환을 직접 설정하는 RN Constrained Direct Modeling과는 달리 Back Modeling에서는 식 (4-66)와 같은 $\alpha_t(X_t)$ 를 직접 설정하는 방법이 이용된다. 이러한 $\alpha_t(X_t)$ 는 항상 식 (4-15)의 관계를 충족하므로 이로부터 다음과 같은 P 측도 하의 조건부로그라플라스변환을 얻을 수 있다.

$$\psi_t^P(u|X_t, \theta_1^*, \theta_2^*) = \psi_t^Q[u - \alpha_t(X_t, \theta_2^*)|X_t, \theta_1^*] - \psi_t^Q[-\alpha_t(X_t, \theta_2^*)|X_t, \theta_1^*] \quad (4-72)$$

여기에서 θ_1^* 는 ψ_t^Q 에 포함된 파라미터이며, θ_2^* 는 $\alpha_t(X_t)$ 에 포함된 파라미터이다. 이러한 방식으로 모형을 설정하는 경우 P 측도 하의 상태변수 확률과정은 식 (4-72)에 의해서 암묵적으로 설정되므로 자산가격의 동태적인 특성을 충분히 설명하지 못할 수 있다. 이자율 기간구조모형의 경우 Q 측도 하에 상태변수의 동태방정식, 단기이자율 그리고 위험의 시장가격을 가정하는 모형설정 방법이다.

Back Modeling을 적용하는 경우 실증분석에서 필요한 P 측도 하의 상태변수 조건부확률밀도함수는 식 (4-16)의 측도변환을 이용하여 다음과 같이 얻어진다.

$$f_t^P(x_{t+1}|X_t, \theta_1^*, \theta_2^*) = f_t^Q(x_{t+1}|X_t, \theta_1^*) \exp\{-\alpha_t'(X_t, \theta_2^*)x_{t+1} - \psi_t^Q[-\alpha_t(X_t, \theta_2^*)|X_t, \theta_1^*]\}$$

5. RN Constrained Direct Modeling 적용 예

이상에서 살펴본 전략 가운데 Direct Modeling과 Back Modeling은 이산

시간 이자율 기간구조모형에서 사용되었다. 여기서는 RN Constrained Direct Modeling 방법을 이산시간 국면전환 이자율 기간구조모형 (RS-DATSM)에서 적용한 예를 살펴본다. 앞서 논의된 Direct Modeling과의 비교를 위해 단일요인 이자율 기간구조모형을 중심으로 한다.

먼저, AR(p) 과정을 따르는 이자율기간구조의 동태적인 특성을 충분히 포착할 수 있도록 연속상태변수 x_t 와 J 차원의 시간이질적인 마르코프체인 z_t 를 결합한 상태변수 $(x_t, z_t)'$ 의 P 측도 하에 동태방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{cases} x_t = \nu(Z_t) + \phi(Z_t)' X_t + \sigma(Z_t) \epsilon_{t+1} \\ \Pr [z_{t+1} = e_j | z_t = e_i, x_{0:t}] = \pi(e_i, e_j; X_t) \end{cases} \quad (4-73)$$

여기서 $\epsilon_{t+1} \sim i.i.d N(0,1)$, $Z_t = (z_t', \dots, z_{t-p}')'$, $X_t = (x_t, \dots, x_{t+1-p})'$ 이다. 그리고 e_i 는 J 차원 항등행렬의 i 번째 열을 나타내며, $\phi(Z_t) = (\phi_1(Z_t), \dots, \phi_p(Z_t))'$ 이다. 식 (4-73)은 x_{t+1} 의 동태방정식의 모든 계수와 조건부표준편차가 국면전환하며, 국면전환 확률이 X_t 에 의존하고 시변하는 모형설정이다.

다음으로 무이표채가격이 상태변수의 지수선형함수가 되도록 Q 측도에서 $(x_t, z_t)'$ 의 확률과정은 Car 과정이 되게 한다. 따라서 AR(p) 과정을 따르는 Q 측도 하의 연속상태변수 x_t 와 J 차원의 시간동질적인 마르코프체인 z_t 의 결합상태변수 $(x_t, z_t)'$ 의 동태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{t+1} = \nu^* Z_t + \phi^*(Z_t) X_t + (\sigma^* Z_t) \epsilon_{t+1}^Q \\ \Pr^Q [z_{t+1} = e_j | z_t = e_i] = \pi^*(e_i, e_j) \end{cases} \quad (4-74)$$

여기서 ν^* 와 σ^* 는 $J(p+1)$ 차원의 벡터이고 $\phi^*(Z_t) = (\phi_1^*(Z_t), \dots, \phi_p^*(Z_t))'$,

$\epsilon_{t+1}^Q \sim i.i.dN(0,1)$ 이다. 또한 단기이자율은 상태변수의 선형함수이다.

$$r_{t+1} = \delta_X' X_t + \delta_Z' Z_t \quad (4-75)$$

여기서 δ_X 와 δ_Z 는 각각 p 차원과 $J(p+1)$ 차원의 벡터이다.

식 (4-73)의 동태방정식으로 설정된 P 측도 하에 상태변수의 확률과정과 식 (4-74)의 동태방정식으로 설정된 Q 측도 하에 확률과정의 로그라플라스변환을 이용하여 식 (4-71)의 관계를 충족하는 위험의 시장가격을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \Lambda(Z_t, X_t) = \lambda_0(Z_t) + \lambda(Z_t)' X_t \\ \Gamma(Z_t, X_t) = [\gamma_1(Z_t, X_t), \dots, \gamma_J(Z_t, X_t)]' \end{cases} \quad (4-76)$$

여기서 $\Lambda_t(Z_t, X_t)$ 와 $\Gamma(Z_t, X_t)$ 는 각각 연속상태변수 x_{t+1} 에 포함된 위험의 시장가격과 국면전환위험의 시장가격을 나타내는 스칼라함수와 J 차원의 벡터함수이다. $\lambda_0(Z_t)$ 는 스칼라함수이며, $\lambda(Z_t)$ 는 p 차원의 벡터함수이다. 위험의 시장가격이 식 (4-76)과 같을 때, 식 (4-71)의 관계에 의하여 다음의 제약관계가 항상 성립한다. 제약이 가지는 의미는 식 (4-12)와 같다.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sigma(Z_t) = \sigma^{*'} Z_t \\ \text{(ii)} \quad & \lambda_0(Z_t) = \frac{\nu^{*'} Z_t - \nu(Z_t)}{\sigma^{*'} Z_t} \\ \text{(iii)} \quad & \lambda(Z_t) = \frac{\phi^*(Z_t) - \phi(Z_t)}{\sigma^{*'} Z_t} \end{aligned} \quad (4-77)$$

$$\text{(iv)} \quad \Gamma_j(Z_t, X_t) = \log \left[\frac{\pi(z_t, e_j, X_t)}{\pi^*(z_t, e_j)} \right]$$

식 (4-76)을 이용하면 SDF를 상태변수의 지수선형함수로 나타낼 수 있다.

$$M_{t+1} = \exp \left[-\delta_X' X_t - \delta_Z' Z_t - \frac{1}{2} \Lambda_t (Z_t, X_t)^2 - \Lambda_t (Z_t, X_t) \epsilon_{t+1} - \Gamma(Z_t, X_t)' z_{t+1} \right] \quad (4-78)$$

이러한 M_{t+1} 은 다음의 관계를 항상 충족하여야 한다.

$$E_t [M_{t+1}] = \exp(-r_{t+1}) = \exp \left[-\delta_X' X_t - \delta_Z' Z_t \right] \left(\sum_{j=1}^J \pi(e_i, e_j; X_t) \exp \left[-\Gamma(Z_t, X_t) e_j \right] \right) \quad (4-79)$$

그런데 식 (4-77)의 (iv)에 의해서 항상 식 (4-80)의 관계가 성립하므로

$$\sum_{j=1}^J \pi(e_i, e_j; X_t) \exp \left[-\Gamma(Z_t, X_t)' e_j \right] = 1, \forall Z_t, X_t \quad (4-80)$$

단기이자율은 상태변수의 선형함수가 되다.

$$r_{t+1} = \delta_X' X_t + \delta_Z' Z_t \quad (4-81)$$

이로부터 식 (4-78)이 국면전환 이산시간 이자율 기간구조모형에서 무이표 채가격이 상태변수의 지수선형함수가 되도록 하는 SDF임을 알 수 있다. 이상과 같은 모형설정에서 채권가격은 상태변수의 지수선형함수가 된다.

$$P_{n,t} = \exp(A_n' X_t + B_n' Z_t) \quad (4-82)$$

여기에서 A_n 과 B_n 은 각각 잔존만기 n 에 의존하는 p 차원의 벡터함수와 $J(p+1)$ 차원의 벡터함수이다. $\{A_n, B_n\}$ 을 구하는 방법은 Direct Modeling

에서와 동일하므로 생략한다.

Joslin et al.(2011)은 RN Constrained Direct Modeling 방법으로 상태변수의 확률과정이 VAR(1) 과정을 따르는 이산시간 이자율 기간구조모형(Gaussian Dynamic Term Structure Model, GDTSM)을 가장하고 모형의 예측성도가 Q 측도 하에 상태변수의 확률과정에 대한 제약(무차익거래 제약을 포함한 제약들)이 아니라 P 측도 하에 상태변수의 확률과정에 부과되는 제약에 따라 결정됨을 보였다. 특히, 이들의 연구에서는 모형의 예측성도가 Q 측도 하의 상태변수 구조(structure)에 영향을 받지 않는다는 점에 착안하여 Q 측도 하의 상태변수에 불변변환(invariance transform)과 회전변환(rotation transform)을 적용한 과정으로 상태변수의 확률과정을 설정하였다. Joslin et al.(2011)에서 기존 모형의 파라미터추정에 많은 시간이 소요되는 것과 달리 RN Constrained Direct Modeling 방법으로 설정된 모형의 추정에는 시간이 거의 소요되지 않음을 보여준다. Joslin et al.(2011)은 이와 같은 새로운 모형의 장점을 이용하여 부트스트랩(bootstrap)을 이용한 파라미터의 표준편차를 제시하였을 뿐만 아니라 다양한 Q 측도와 P 측도 하의 확률과정에 부과된 제약이 예측성도에 미치는 영향을 비교분석하여 Q 측도의 확률과정에 대한 제약이 아니라 P 측도의 확률과정에 대한 제약이 예측성도에 영향을 준다는 분석결과를 제시하였다. 이러한 결과를 바탕으로 이들은 Diebold et al.(2006)에서 제시된 일반화된 Nelson-Siegel 이자율 기간구조모형이나 Christensen et al.(2009)에서 제시된 무차익제약이 부과된 일반화된 Nelson-Siegel 이자율 기간구조모형이 다른 모형들보다 더 좋은 예측성도를 보이는 것은 이들 모형들에 포함된 P 측도 하의 상태변수에 대한 제약에 기인한다고 주장하였다. 상태변수의 확률과정에 대한 Q 측도 하에서 제약이 아닌 P 측도 하에서 제약이 이자율 기간구조모형의 예측성도에 중대한 영향을 미친다는 결과는 Duffee(2009)에서도 제시되었다.

제 5 장 요약 및 결론

본 연구에서는 이산시간 이자율기간구조에 관한 기존의 연구들을 정리·소개하고 그 발전과정을 살펴보고자 하였다. 이산시간모형을 크게 연속시간모형을 이산화한 상사모형과 Car 과정에 바탕을 둔 정확한 이산시간모형으로 나누고, 연속시간모형과의 비교를 통해 그 특징과 한계를 살펴보았다. 이산화모형은 연속시간모형이 가지는 특성들이 일반적으로 유지되지 않을 뿐만 아니라, 상태변수의 해석적인 전이확률밀도함수를 얻는 것이 쉽지 않아 실증분석의 측면에서 한계를 가진다. 그러나 Car 과정으로 설명되는 정확한 이산시간모형은 연속시간모형이 가지는 특성을 모두 충족시키기 때문에 이산화모형이 가지는 문제점을 극복하는 모형이라 할 수 있다.

연속시간 Vasicek모형을 이산화한 모형은 이산화에 따른 문제가 크게 발생하지 않는다. 그러나 확률변동성을 설명하기 위해 상태변수의 조건부분산이 상태변수의 선형함수가 되도록 한 CIR모형의 경우, 이산화 과정에서 Feller조건이 적용되더라도 상태변수의 비음조건이 충족되기 어려울 수 있으며, 연속시간모형에서와 같이 각 요인들이 서로 독립인 경우를 제외하고는 여전히 해석적인 전이확률밀도함수를 얻는 것이 쉽지 않다. BFT 및 AP는 Vasicek과 CIR모형을 결합한 형태의 일반적인 이산화 지수선형모형을 제시하였으나, 연속시간 하에서와 유사한 제약이 가해지더라도 변동성을 유발하는 상태변수가 음의 값을 가질 수 있는 문제를 해결하지 못한다. 이와 달리 CIR모형에 상응하는 ARG 과정을 이용한 정확한 이산시간모형의 경우 Car 과정을 따르므로 상태변수가 항상 양의 값을 가지며, 각 요인들이 서로 독립이 아니더라도 항상 닫힌 형태의 우도함수를 얻을 수 있었다. LSD는 Q 측도 하에서 상태변수가 VARG 과정을 따른다는 가정을 통해 BFT 및 AP모형이 가지는 변동성을 유발하는 상태변수로 인한 문제를 해결하며, 이산시간 지수선형모형

의 표준형태를 제시하였다.

요약하면, 연속시간 상사모형은 이산화과정을 거치면서 연속시간모형이 가지는 확률적인 특성을 모두 충족시키지 못할 수 있으며, 해석적인 전이확률밀도함수 또한 얻지 못할 수 있으나, 이산시간 지수선형과정인 Car 과정을 따르는 정확한 이산시간모형에서는 이러한 문제가 발생하지 않게 된다. 본 논문은 연속시간모형과의 비교를 통해 이산화모형이 가지는 특징과 한계를 알고, 이를 극복할 수 있는 정확한 이산시간모형의 특성들을 살펴보았다.

결론적으로, 정확한 이산시간 이자율 기간구조모형은 단히 채권가격의 해석해를 얻을 수 있고, 채권수익률의 우도함수를 알 수 있을 뿐 아니라, 동시에 해당 연속시간모형에서의 확률과정의 특징을 모두 충족시킬 수 있다. 이러한 장점으로 인하여 실증분석 측면에서 모형의 설정과 추정이 용이할 뿐 아니라, 축약모형 또는 부분균형모형에 그치지 않고 일반균형모형으로 확장될 수 있다는 점에서도 이에 대한 활발한 연구가 지속적으로 이루어질 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- Ahn, D-H., R. Dittmar and A. Gallant (2002), Quadratic Term Structure Models : Theory and Evidence, *Review of Financial Studies*, 15, 243-288.
- Ang, A., G. Bekaert and M. Wei (2008), The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation, *Journal of Finance*, 63, 797-843.
- Ang, A., J. Boivine and S. Dong (2008), Monetary Policy Shifts and the Term Structure, Working Paper
- Ang, A., S. Dong and M. Piazzesi (2007), No-Arbitrage Taylor Rules, NBER Working Paper
- Ang, A., and M. Piazzesi (2003), A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables, *Journal of Monetary Economics*, 50, 745-787.
- Ang, A. M. Piazzesi and M. Wei (2006), What does the yield curve tell us about GDP growth, *Journal of Econometrics*, 131, 359-403.
- Backus, D., S. Foresi, A. Mozumdar and L. Wu (2001) Predictable changes in yield and forward rates, *Journal of Financial Economics*, 59, 281-311.
- Backus, D., S. Foresi and C. Telmer (1998), Discrete time models of bond pricing, NBER Working Paper.
- Backus, D., S. Foresi and C. Telmer (2001) Affine Term Structure Models and the Forward Premium Anomaly, *The Journal of Finance*, 64(1), 279-304.
- Backus, D., S. Foresi and S. Zin (1998), Arbitrage Opportunities and Arbitrage-Free Models of Bond Pricing, *Journal of Business and Economic Statistics*,

16(1), 13-26.

Balduzzi, P., S. Das, and S. Foresi (1998), The Central Tendency: A Second Factor in Bond Yields, *Review of Economics and Statistics*, 80, 62-72.

Balduzzi, P., S. Das, S. Foresi and R. Sundram (1996), A Simple Approach to Three Factor Affine Term Structure Models, *Journal of Fixed Income*, 6, 43-53.

Bansal, R., G. Tauchen and H. Zhou (2004), Regime Shifts, Risk Premiums in the Term Structure and Business Cycles, *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, 396-409.

Bansal, R. and A. Yaron (2004), Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles, *Journal of Finance*, 59, 1481-1509.

Bansal, R. and H. Zhou (2002), Term Structure of Interest Rates with Regime shifts, *Journal of Finance*, 57, 1997-2043.

Beaglehole, D. R. and M. S. Tenney (1991), General Solutions of Some Interest Rate Contingent Claim Pricing Equations, *Journal of Fixed Income*, 1, 69-83.

Bertholon, H., A. Monfort, and F. Pegoraro (2006), Pricing and Inference with Mixtures of Conditionally Normal Processes, CREST DP.

Bertholon, H., A. Monfort, and F. Pegoraro (2008), Econometric Asset Pricing Model, *Journal of Financial Econometrics*, 6(4), 407-458.

Bikbov, R. and M. Chernov (2010), No-Arbitrage Macroeconomic Determinants of the Yield Curve, *Journal of Econometrics*, 150, 166-182.

Bliss R. R. (1997), Testing Term Structure Estimation Method, *Advances in Futures and Options Research*, 9, 197-231.

- Campbell, J. Y. (1999), Asset Prices, Consumption and Business Cycles, *Handbook of Macroeconomics*, 1C, 1231-1303.
- Campbell, J. Y. and J. H. Cochrane (1999), By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior, *Journal of Political Economy*, 107(2), 205-251.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Chen, R. and L. Scott (1993), Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Fixed Income*, 3, 14-31.
- Cheridito, R., D. Filipovic and R. Kimmel (2007), Market Price of Risk Specifications for Affine Models: Theory and Evidence, *Journal of Financial Economics*, 83, 123-170.
- Chib, S. and B. Ergashev (2009), Analysis of Multi-Factor Affine Yield Curve Models, *Journal of American Statistical Association*, 104, 1324-1337.
- Christensen, J. H. E., F. X. Diebold and G. D. Rudebusch (2009), An arbitrage-free generalized Nelson-siegel term structure model, *Econometrics Journal*, 12, C33-C64.
- Cochrane, J. H. (2005), *Asset Pricing*, Princeton University Press.
- Cochrane, J. H. and M. Piazzesi (2005), Bond Risk Premia, *The American Economic Review*, 95, 138-160.
- Constantinides, G. (1992), A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates, *Review of Financial Studies* 5, 531-552.

- Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, 385-407.
- Dai, Q. and K. Singleton (2000), Specification Analysis of Affine Term Structure Models, *Journal of Finance*, 55, 1943-1978.
- Dai, Q. and K. Singleton (2002), Expectation Puzzles, Time-Varying Risk Premia, and Affine Models of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 63(3), 415-441.
- Dai, Q., K. Singleton and W. Yang (2007), Regime Shifts in a Dynamic Term Structure Model of U.S. Treasury Bond Yield, *Review of Financial Studies*, 20(5), 1699-1706.
- Darolles, S., C. Gouriéroux, and J. Jasiak (2006), Structural Laplace Transform and Compound Autoregressive Models, *Journal of Time Series Analysis*, 24(4), 477-503.
- Diebold, F. X., G. D. Rudebusch and S. B. Aruoba (2006), The macroeconomic and the yield curve: a dynamic latent factor approach, *Journal of Econometrics*, 131, 309-338.
- Duarte, J. (2004), Evaluating an Alternative Risk Preference in Affine Term Structure Models, *Review of Financial Studies*, 17, 379-404.
- Duffee, G. (2002), Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models, *Journal of Finance*, 57, 405-443.
- _____ (2006), Term structure estimation without using latent factors, *Journal of Financial Econometrics*, 79, 507-536.
- _____ (2009), Forecasting with the term structure: The role of no-arbitrage restrictions, Working Paper

- Duffie, D., D. Filipovic, and W. Schachermayer (2003), Affine Processes and Applications in Finance, *Annals of Applied Probability*, 13, 984-1053.
- Duffie, D. and R. Kan (1996), A Yield Factor Model of Interest Rate, *Mathematical Finance*, 6, 379-406.
- Epstein, L. and S. Zin (1991), Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework, *Econometrica*, 57, 937-969.
- Eraker, B. (2008), Affine General Equilibrium Model, *Management Science*, 54(2), 2068-2080.
- Favero, C. A., L. Niu and L. Sala (2010), Term Structure Forecasting: No-Arbitrage Restrictions versus Large Information Set, *Journal of Forecasting*.
- Fong, H. G. and O. A. Vasicek (1991), Fixed Income Volatility Management, *Journal of Portfolio Management*, Summer, 41-46.
- Gallmeyer, M. F., B. Hollifield, F. Palomino and S. Zin (2007), Arbitrage-Free Bond Pricing with Dynamic Macroeconomic Models, *Federal Reserve Bank of St. Louise Review*, July/August, 305-329.
- Gallmeyer, M. F., B. Hollifield and S. E. Zin (2005), Taylor Rules, McCallum Rules, and the Term Structure of Interest rates, Working Paper.
- Gourieroux, C. (2006), Continuous time Wishart process for stochastic risk, *Econometric Reviews*, 25, 177-217.
- Gourieroux, C. and J. Jasiak (2006), Autoregressive Gamma Processes, *Journal of Forecasting*, 25(2), 129-152.

- _____ (2004), A Dynamic Model for Multivariate Stochastic Volatility: The Wishart Autoregressive Process, Working Paper.
- Gourieroux, C., J. Jasiak, and R. Sufana (2009), The Wishart autoregressive process of multivariate stochastic volatility, *Journal of Econometrics*, 150, 167-181.
- Gourieroux, C. and A. Monfort (2007), Econometric Specifications of Stochastic Discount Factor Models, *Journal of Econometrics*, 136, 509-530.
- _____ (2011), Domain Restrictions on Interest Rates Implied by No Arbitrage, *Mathematical Finance*, 21(2), 281-291.
- Gourieroux, C., A. Monfort and V. Polimenis (2002), Affine Term Structure Models, Working Paper.
- _____ (2003), Discrete Time Affine Term Structure Models, CREST DP.
- _____ (2006), Affine Model for Credit Risk Analysis, *Journal of Financial Econometrics*, 4(3), 494-530.
- Gourieroux, C. and R. Sufana (2010), Derivative Pricing With Wishart Multivariate Stochastic Volatility, *Journal of Business and Economic Statistics*, 28(3), 438-451.
- _____ (2011), Discrete time Wishart term structure models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35, 815-824.
- Hansen, L. and S. Richard (1987), The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restriction Implied by Dynamics Asset Pricing Models, *Econometrica*, 55, 587-613.

- Harrison, M. and D. Kreps (1979), Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *Journal of Economics Theory*, 20, 381-408.
- Harrison, M. and S. Pliska (1981), Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215-206.
- Hördahl, P., O. Tristani and D. Vestin (2006), A Joint Econometric Model of Macroeconomic and Term Structure Dynamics, *Journal of Econometrics*, 131, 405-444.
- James, J. and N. Webber (2000), Interest rate return, John Wiley and Sons Ltd
- Jegadeesh, N. and G. Pennachi (1996), The Behavior of Interest Rates Implied by the Term Structure of Eurodollar Futures, *Journal of Money, Credit and Banking*, 28, 426-446.
- Joslin, S., K. Singleton and H. Zhu (2011), A New Perspective on Gaussian Dynamic Term Structure Models, *The Review of Financial Studies*, 24(3), 926-970.
- Kim, D. H. (2009), Challenges in Macro-Finance Modeling, *Federal Reserve Bank of ST. Louise Review*, September/October Part 2, 519-544.
- Le, A., K. Singleton and Q. Dai (2010), Discrete-Time Affine Q Term Structure Models with Generalized Market Prices of Risk, *Review of Financial Studies*, 23(5), 2184-2216.
- Leippold, M. and L. Wu (2002), Asset Pricing under the Quadratic Class, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 271-295.
- Lettau. M. and J. M. Wachter (2011), The term structure of equity and interest rates, *Journal of Financial Economics*, 101, 90-113.
- Longstaff, F. A. (1989), A nonlinear general equilibrium model of the term

structure, *Journal of Financial Economics*, 23, 195-224.

Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz (1992), Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model, *Journal of Finance*, 47, 1259-1282.

Lund, J. (1999), A Model for Studying the Effect of EMU on European Yield Curves, *European Financial Review*, 2, 321-363.

Monfort, A. and F. Pegoraro (2006a), Multi-Lag Term Structure Models with Stochastic Risk Premia, CREST DP.

_____ (2006b), Switching VARMA Term Structure Models-Extended Version, CREST DP.

_____ (2007), Switching VARMA Term Structure Models, *Journal of Financial Econometrics* 5(1), 105-153.

Pegoraro, F. (2006), Discrete Time Factor Models for Asset Pricing, PhD dissertation, Universite Paris-Dauphine, France.

Piazzesi, M. (2010), Affine Term Structure Models, *Handbook of Financial Econometrics*, Vol 1, 691-766.

Polimenis, V. (2001), Essays in Discrete Time Asset Pricing, PhD dissertation, University of Pennsylvania.

Realdon, M. (2006), Pricing the Credit Risk of Secured Debt and Financial Leasing, *Journal of Business and Accounting*, 33(7), 1298-1320.

Singleton, K. (2006), Empirical Dynamic Asset Pricing, Princeton University Press.

Watcher, J. A. (2006), A consumption-based model of the term structure of interest

rates, *Journal of Financial Economics*, 79, 365-399.

Weil, P. (1989), The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, 24, 401-421.

Vasicek, O. A. (1977), An Equilibrium Characterization of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

Abstract

Studies on the Dynamic Term Structure Models of Interest Rates

JeongMin Park

Department of Finance

The Graduate School of Business Administration

Seoul National University

Most of dynamic term structure models(DTSMs) of interest rates are specified in terms of latent state variables to capture the stylized facts observed in the real world such as mean reversion, persistence, and stochastic volatilities of bond yields. In these model specifications, however, the dependency of the conditional second moments on the interest rate, so called the level effect, is implicitly fixed rather than explicitly given. As such, the first part of this thesis proposes a Bayesian Markov Chain Monte Carlo(MCMC) algorithm to estimate a general stochastic volatility model of the short-term interest rate, and examine the efficacy of the extant DTSMs in capturing conditional second moments which include both stochastic volatilities and the level effects. It is founded that the posterior distributions of level effect parameters are significantly different across a number of short-term (weekly and daily frequencies) interest rate series. For example, posterior mean values of the level effect estimated from weekly T-Bill yield data and Korea T-Bill yield data are close to those of ATSM and QTSM

respectively. These results imply that when using DTSMs in applied works, we should keep in mind the limitation of each model, especially in terms of the ability to capture conditional second moment.

The second part of this thesis reviews existing studies on the dynamic term structure of interest rates in discrete time to discuss some recent developments and to shed light on the direction of future research in this area. Although, since Vasicek(1977) and Cox, Ingersoll, and Ross(1985), continuous time term structure models have seem to be popular in theoretical and empirical studies, a variety of discrete time models have also been developed. While continuous time models may be advantageous for obtaining closed-form solutions of bond prices, discrete time models can be more useful in that bond prices (or interest rates) in reality are observed in discrete time intervals. In this perspective, discrete time term structure models are classified into two categories. One is the ‘continuous time model analog,’ in which continuous time stochastic process are Euler-discretized. The other is the ‘exact discrete time model,’ in which state variables follow discrete time exponential affine process of which Car(compound autoregressive) process is typical. Then, the paper discusses characteristics and limitations of respective models in each category by comparing them with those of their continuous time counterparts. It is shown that the exact discrete time model resolves the problems of the continuous time analog, caused by discretization of continuous time model, that its state variables can be negative even if the Feller condition are met, and that it may be infeasible to obtain analytical transition probability density function.

***Keywords:* Continuous Time Term Structure Model of Interest Rate,
Level Effect, Stochastic Volatility, MCMC(Markov Chain
Monte Carlo), Bayesian Inference, Exact Discrete Time Model,
Feller Condition, Car(Compound Autoregressive) Process**

Student Number : 2007-30791